الجزء الثاني من المسخة القصرية

في الاعمال الجبرية

طبع بمطبعة مدرسة المهندسخانة الخديوية

١٢٦٨

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

فهرست الجزء الثاني من المنح الزهرية في الاعمال الجبرية — صحيفة

الباب الرابع

في المتتابعات والمتواليات العددية والهندسية والكسور المتسلسلة والحل غير المعين للمعادلات ذات الدرجة الاولى

الباب الخامس في نظريات الاعداد الأولية والكسور غير القابلة للاختصار وخواص قسمة الاعداد على بعض قواسمها ونظريات على الجزور ٢٣٧

ن - ر = هـ - و

في طريقة المكررات غير المعينة

ا

بسم الله الرحمن الرحيم

الباب الرابع

في المناسبات والمتواليات العددية والهندسية والمتباينات والكسور المتسلسلة والحل غير المعين للمعادلات ذات الدرجة الاولى

في المناسبة العددية اى التفاضلية

بند ٩٤ براهين خواص المناسبة المقررة في كتب علم الحساب تسهل جدًا بواسطة القواعد الجبرية وبيان ذلك أن يقال

كل مناسبة عددية كالمناسبة

ح : د :: هـ : و

توضع هكذا

ح − د = هـ − و ومنها يستخرج

ح + و = هـ + د ، و = هـ + د − ح ، هـ = ح + و − د

أعني أن كل مناسبة عددية حاصل جمع طرفيها يساوي حاصل جمع وسطيها وأن أحد طرفيها يساوي حاصل جمع وسطيها منقوصًا منه الطرف الآخر وأن أحد وسطيها يساوي حاصل جمع طرفيها منقوصًا منه الوسط الآخر

وينتج

ويستنتج من المتساوية ح + و = هـ + ء أن ح - ء = هـ - و

أعني إذا ساوى حاصل جمع عددين حاصل جمع عددين آخرين تركب من هذه الأعداد الأربعة متناسبة عدد جزأ أحد الحاصلين طرفاها وجزأ الآخر وسطاها

والوسط التفاضلي لعددين يساوي نصف حاصل جمعهما لأنه من المناسبة

ح : س :: س : ء يحدث

٢ س = ح + ء ومن هذه المتساوية ينتج

س = (ح + ء) / ٢

في المتناسبة الهندسية

بند ٩٣ كل متناسبة هندسية كالمتناسبة ح : ء :: هـ : و

توضع هكذا ح / ء = هـ / و ومن هذه المتساوية ينتج

ح و = ء هـ ، و = ء هـ / ح ، هـ = ح و / ء

أعني أن كل متناسبة هندسية حاصل ضرب طرفيها يساوي حاصل ضرب وسطيها وأن أحد طرفيها يساوي خارج قسمة حاصل ضرب وسطيها على طرفها الآخر وأن أحد وسطيها يساوي خارج قسمة حاصل ضرب طرفيها على الوسط الآخر

ويستنتج من كل متساوية كالمتساوية ح و = ء هـ أن ح / ء = هـ / و

أعني متى كان حاصل ضرب عددين مساويًا حاصل ضرب عددين آخرين تركب من هذه الأربعة أعداد متناسبة هندسية اصلا أحد الحاصلين طرفا [illegible]

واصلا الحاصل الآخر وسطا نسبتها

ويستنتج من المساوية ح و = د هـ بناء على ما تقدم ثمان متناسبات

ح : د :: هـ : و ح : هـ :: د : و و : د :: هـ : ح و : هـ :: د : ح

د : ح :: و : هـ د : و :: ح : هـ هـ : و :: ح : د هـ : ح :: و : د

فيشاهد من متناسبات الصف الاول الأربعة أن الأربعة الأعداد المتناسبة مع بعضها يتكون منها متناسبة ايضًا بتغيير موضع الوسطين أو الطرفين .

ويشاهد ايضًا من متناسبات الصف الثانى الأربعة أن التناسب لا يتغير بتغيير الطرفين بالوسطين والوسطين بالطرفين

والوسط الهندسى بين عددين أو كميتين يساوى جذر حاصل ضربهما لانه من المناسبة ح : س :: س : د يحدث

س = $\sqrt{ح \times د}$ أو س = $\sqrt{ح \times د}$

واذا ضرب طرف ووسط متناسبة فى عدد واحد أو قسما عليه بقيت المناسبة على حالها لانه يستنتج من المساوية $\frac{ح}{د} = \frac{هـ}{و}$ أن

$\frac{ح}{د} = \frac{هـ م}{و م}$ أو ح : د :: هـ م : و م

ويستنتج ايضًا من المساوية المذكورة $\frac{ح}{هـ} = \frac{د}{و}$ ومن هذه يحدث

$\frac{ح}{هـ} = \frac{د م}{و م}$ أى ح : هـ :: د م : و م

ومثل هذا يبرهن على حالة القسمة

واذا كان للمتناسبتين نسبة مشتركة تركب من النسبتين الاخريين متناسبة فالمتناسبتان

ح : د :: هـ : و ، ح : د :: هـَ : وَ يوضعان هكذا

$\frac{ح}{د} = \frac{هـ}{و}$ ، $\frac{ح}{د} = \frac{هـَ}{وَ}$. ومن هاتين المتساويتين يحدث

$\frac{هـ}{و} = \frac{هـَ}{وَ}$ أى هـ : و :: هـَ : وَ

ومتى اتحد المقدمات أو التاليات فى متناسبتين تركب من غير المتحد منهما متناسبة

لانه اذا وضعت المتناسبتان ح : د :: هـ : و ، ح : ع :: هـ : ك أو

د : ح :: و : هـ ، ع : ح :: ك : هـ

استنتج منهما بمقتضى ما تقدم

ح : هـ :: د : و ، ح : هـ :: ع : ك فاذا يحدث

د : و :: ع : ك أى د : ع :: و : ك

وكل متناسبة هندسية كالمتناسبة ح : د :: هـ : و يمكن وضعها

هكذا $\frac{ح}{د} = \frac{هـ}{و}$ وباضافة واحد لكل من طرفى هذه المتساوية

أو طرحه منها تؤل الى

$\frac{ح}{د} \pm ١ = \frac{هـ}{و} \pm ١$ أى

$\frac{ح \pm د}{د} = \frac{هـ \pm و}{و}$ ومنها يحدث

ح + د : د :: هـ + و : و ، ح − د : د :: هـ − و : و

ويحدث أيضا من مقارنة المتناسبة ح : د :: هـ : و مع كل من المتناسبتين

المقدمتين ث

ح + ى : ه :: هـ + و : هـ ، ح − ى : ه :: هـ − و : هـ ومنها يحدث

ح + ى : ح − ى :: هـ + و : هـ − و

ويتج من ذلك أن نسبة المقدم الاول زائدًا أو ناقصًا التالى الأول الى هذا التالى كنسبة المقدم الثانى زائدًا أو ناقصًا التالى الثانى الى هذا التالى وأن نسبة المقدم الأول زائدًا أو ناقصًا التالى الاول الى هذا المقدم كنسبة المقدم الثانى زائدًا أو ناقصًا التالى الثانى الى هذا المقدم

وأن نسبة المقدم الأول زائدًا تاليه الى هذا المقدم ناقصًا تاليه كنسبة المقدم الثانى زائدًا تاليه الى هذا المقدم ناقصًا تاليه

واذا غير وسطا المناسبة ح : ى :: هـ : و آلت الى

ح : هـ :: ى : و ومنها يحدث بنا على ما تقدم

ح ± هـ : ى ± و :: هـ : و :: ح : ى ومنها يحدث

ح + هـ : ى + و :: ح − هـ : ى − و

أعنى أن نسبة حاصل جمع أو فاضل مقدمى متناسبة الى حاصل جمع أو فاضل تاليهما كنسبة أى مقدم الى تاليه وأن نسبة حاصل جمع المقدمين وحاصل جمع التاليين تعادل النسبة بين فاضل المقدمين وفاضل التاليين

والمتناسبة التى بهذه الصورة ح : ى :: هـ : و :: ر : ع :: ط : ى :: ك

تسمى متناسبة متوالية

وكل متناسبة متوالية حاصل جمع مقدماتها الى حاصل جمع تالياتها كنسبة أى مقدم الى تاليه فاذا رمز للنسبة المشتركة فى هذه المتناسبة بالحرف ل تحصل

$\frac{ب}{ا} = ل$, $\frac{هـ}{و} = ل$, $\frac{ج}{ح} = ل$, $\frac{ط}{ى} = ل$ ..... الخ

ومنها يحدث

$ب = ال$, $هـ = ول$, $ج = حل$, $ط = ىل$ ..... الخ

وبجمع هذه المتساويات طرفاً الى طرف يحدث

$ب + هـ + ج + ط + ح = ل(ا + و + ح + ى + ... الخ)$

ومنها يحدث

$\frac{ب + هـ + ج + ط + ... الخ}{ا + و + ح + ى + ... الخ} = ل = \frac{ب}{ا} = \frac{هـ}{و} = \frac{ج}{ح} = الخ$ فاذا يكون

$ب + هـ + ج + ط + ... الخ : ا + و + ح + ى + ... الخ :: ب : ا :: هـ : و :: ج : ح :: الخ$

واذا ضربت جملة متناسبات بالترتيب فى بعضها تكون من حواصل الضرب الاربعة المختلفة متناسبة فالمتناسبات

$ب : ا :: هـ : و$, $ب' : ا' :: هـ' : و'$, $ب'' : ا'' :: هـ'' : و''$ يحدث منها

$\frac{ب}{ا} = \frac{هـ}{و}$, $\frac{ب'}{ا'} = \frac{هـ'}{و'}$, $\frac{ب''}{ا''} = \frac{هـ''}{و''}$ وبضربها يحدث

$\frac{ب ب' ب''}{ا ا' ا''} = \frac{هـ هـ' هـ''}{و و' و''}$ ∴ $ب ب' ب'' : ا ا' ا'' :: هـ هـ' هـ'' : و و' و''$

واذا رفع كل من الحدود الاربعة لمتناسبة الى درجة ما أو أخذ جذر كل منها

بدرجة واحدة لم تزل متناسبة

فالمناسبة ح : ء :: هـ : و توضع هكذا

$\frac{ح}{ء} = \frac{هـ}{و}$ فاذا رفع طرفا هذه المتساوية لدرجة ما أو اخذ جذراهما

بدرجة ما بقيتا على حالها فيكون

$\frac{ح^{م}}{ء^{م}} = \frac{هـ^{م}}{و^{م}}$, $\frac{\sqrt[ن]{ح}}{\sqrt[ن]{ء}} = \frac{\sqrt[ن]{هـ}}{\sqrt[ن]{و}}$ ومنهما يحدث

$ح^{م} : ء^{م} :: هـ^{م} : و^{م}$, $\sqrt[ن]{ح} : \sqrt[ن]{ء} :: \sqrt[ن]{هـ} : \sqrt[ن]{و}$

في المتواليات العددية

بند ٩٦ كل متسلسلة مركبة من حدود يزيد أحدها عن سابقه أو ينقص عنه بكمية ثابتة تسمى متوالية عددية أو تفاضلية والكمية الثابتة تسمى اساس المتواليه فالمتسلسلتان

١ و ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٩ ، ٢٢ ، ٢٥ و

٦٢ ، ٥٦ ، ٥٠ ، ٤٤ ، ٣٨ ، ٣٢ ، ٢٦ ، ٢٠ ، ١٤

تسميان متواليتين الا أن الاولى تسمى متوالية عددية تصاعدية اساسها ثلاثة والاخرى تنازلية اساسها أربعة فالمتوالية العددية تكون تصاعدية او تنازلية بحسب كون اساسها موجبا أو سالبا

واذا رمز بالحروف ح ، ء ، هـ ، و ..... الخ لحدود متوالية عددية توضع هكذا

ج ، د ، هـ ، و ، ز ، ح ، ط ..... ن ، ل

ويلفظ بها ج الى د الى هـ الى و الى ..... الخ

واذا رمز للأساس بالحرف ر وللحد الاول بالحرف ج وللحد الأخير المسبوق بحدود عددها ن - ١ بالحرف ن تخصص بمقتضى التعريف

د = ج + ر هـ = د + ر و = هـ + ر ل = ن + ر أى

د = ج + ر ، هـ = ج + ٢ر ، و = ج + ٣ر ..... ن = ج + (ن - ١) ر

فمعناه أى حد من متوالية عددية يساوى الحد الاول مضافا اليه حاصل ضرب عدد الحدود السابقة له فى الأساس

وحيث أن المعادلة ن = ج + (ن - ١) ر ..... (١) تشتمل على اربع كميات فلا يمكن ادراك احدها الا بعد معرفة الثلاث الاخرى

واذا اريد ادخال جملة حدود عددها م بين أى حدين معلومين بشرط أن يتركب من الجميع متوالية عددية فالمشاهد أن هذه المتوالية لا تحتاج فى تركيبها الا لتعيين اساسها المجهول ولذا يستخرج من معادلة (١)

$$ر = \frac{ن - ج}{ن - ١}$$

وحيث كان ن = م + ٢ يكون

$$ر = \frac{ل - ج}{م + ١}$$

فمعنى أن أساس المتوالية المطلوبة يساوى خارج قسمة فاضل الحدين المعلومين

على عدد الحدود المدخلة زائدًا واحدًا

فاذا اريد ادخال ثمانية حدود بين العددين ٤ ، ٤٩ بحيث يتركب من الجميع متوالية عددية وضع في المعادلة $ر = \frac{ل - ح}{م + ١}$ بدل ل ، ح ، م مقاديرها وهي ٤٩ ، ٤ ، ٨ فيتحصل $ر = \frac{٤٩ - ٤}{٩} = \frac{٤٥}{٩} = ٥$ أعني أن الأساس المطلوب يساوي ٥ وحينئذ تركب المتوالية هكذا

÷ ٤ ، ٩ ، ١٤ ، ١٩ ، ٢٤ ، ٢٩ ، ٣٤ ، ٣٩ ، ٤٤ ، ٤٩

وحاصل جمع كل حدين كائنين على ابعاد متساوية من طرفي متوالية يساوي حاصل جمع هذين الطرفين من المتوالية العددية

÷ ح ، ء ، هـ ، و ، ج ، ط ، ل يتحصل

ء = ح + ر و ط = ل − ر ومنهما يحدث

ء + ط = ح + ل

وقس على هذا

ثم اذا اريد تحصيل مقدار حاصل جمع حدود متوالية عددية كالمتوالية

÷ ح ، ء ، هـ ، ..... ل

يتحصل بالبناء على ما تقدم

ج = ح + (ح + ر) + (ح + ٢ر) + ... + [ح + (ن − ١) ر]

بالرمز بالحرف ج لمقدار حاصل جمع حدود المتوالية المطلوب

والايجاد

ولايجاد قانون مختصر عن هذه نوضع المتساوية المتقدمة بهاتين الصورتين

ع = ح + (ح + ء) + (ح + ٢ء) + ... + (ل − ٢ء) + (ل − ء) + ل

ع = ل + (ل − ء) + (ل − ٢ء) + ... + (ح + ٢ء) + (ح + ء) + ح

ثم بجمع هاتين المتساويتين طرفا الى طرف وملاحظة أن حاصل جمع كل حدين متحدين فى الرتبة يؤول الى ح + ل يتحصل

٢ع = ح + ل مكررا بقدر عدد الحدود أى

٢ع = (ح + ل) ن ومنها يحدث

$$ع = \frac{(ح + ل)ن}{٢} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

اعنى أن حاصل جمع حدود متوالية تفاضلية يساوى نصف حاصل جمع حديها المتطرفين مكررا بقدر عدد حدودها

واذا وضع فى قانون (٢) بدل الحد الاخير ل مقدار المبين بمعادلة (١) آل الى

$$ع = \frac{[٢ح + (ن - ١)ء]ن}{٢}$$

بند ٩٦ تحل المسائل المتعلقة بالمتواليات العددية بواسطة معادلتى (١) ، (٢) وذلك انه اذا علم ثلاث كميات من الخمس ح ، ء ، ن ، ل ، ع الداخلة فى معادلتى (١) ، (٢) أمكن تعيين الاثنتين الآخريين ومن تعشيق هذه الكميات الخمس مع بعضها بفرض ثلاث منها معلومة وباقيها مجهولا يحدث عشر مسائل سهلة الحل

لانه يتحصل دائماً معادلتان مشتملتان على مجهولين

ونقتصر على حل المسائل الآيلة الى حل معادلة بدرجة ثانية فنقول

المسئلة الاولى اذا علم ح , خ , ر واريد تعيين ه , ل بحذف المجهول ل من معادلتى (١) , (٢) فيتحصل

$$ه = \frac{١}{٢ر} \left[ر - ٢ح \pm \sqrt{(ر - ٢ح)^٢ + ٨ر خ} \right] \cdots\cdots (٣)$$

واذا وضع بدل ه فى المعادلة (١) مقداراه توصل الى مقدارى ل المطابقين لهما لكن لامكانية حل هذه المسئلة يلزم أن يكون ه عدداً صحيحاً موجباً

فاذا فرض فى قانون (٣) ح = +٩ , خ = ١٤ , ر = -٢ حدث

ه = +٣ , ه = +٧ فاذاً يحدث من قانون (١) المقداران المطابقان للمجهول ل وهما +٥ , -٣ وحيث كان لكل من المجهولين مقداران يمكن تركيب متواليتين موافقتين لمنطوق المسئلة هما

÷ ٩ . ٧ . ٥ , ÷ ٩ . ٧ . ٥ . ٣ . ١ , -٢ , -٣

واذا فرض ايضاً فى المعادلتين المتقدمتين ح = ٣ , خ = ٢٤ , ر = ٢ تحصل ه = ٤ , ه = -٦ ومن حيث أن ه ليس له الا مقدار موجب لا يتحصل الا متوالية موافقة لمنطوق المسئلة هى

÷ ٣ . ٥ . ٧ . ٩

المسئلة الثانية اذا علم ل , خ , ر واريد تعيين ه , ح استخرج

من معادلة (١) مقدار ه فيكون (٧-١)

ه = ل - (ن - ١) ر ..... (٤)

ثم بوضع مقدار ه في معادلة (٢) بدله ويستخرج مقدار ن فيحدث

ن = $\frac{١}{٢ر}$ [ر + ٢ل ± $\sqrt{(ر + ٢ل)^٢ - ٨ر خ}$]

وهو قانون يعلم منه مقدار المجهول ن

فاذا فرض ل = ٩ ، خ = ١٤ ، ر = ٢ حدث ن = ٣ ، ن = ٧

وبناء عليه يكون مقدارا ه المطابقان لمقداري ن والمستخرجان من معادلة (٤) هما + ٥ ، - ٣ فحينئذ تحدث المتواليتان

ث ٥ ، ٧ ، ٩ ، ث ، - ٣ ، - ١ ، + ١ ، + ٣ ، + ٥ ، + ٧ ، + ٩

وهاك جدولاً يشتمل على حل المسائل العشر المتقدمة ذكرناه هنا لمن يريد الممارسة في ذلك

عدد المسائل	معالم مجاهيل	مقادير المجاهيل
١	$\text{ه}_{\text{ر}}$ ، $\text{ل}_{\text{ع}}$	$\text{ع} = \text{ل} + (\text{ن}-١)\text{ر}$ ، $\text{ل} = \text{ه} + (\text{ن}-١)\text{ر}$
٢	$\text{ع}_{\text{ر}}$ ، $\text{ه}_{\text{ل}}$	$\text{ل} = \frac{\text{ع}-\text{ه}+٢(\text{ن}-١)\text{ر}}{٢\text{ن}}$ ، $\text{ه} = \frac{\text{ع}-٢(\text{ن}-١)\text{ر}}{٢\text{ن}}$
٣	$\text{ل}_{\text{ر}}$ ، $\text{ه}_{\text{ع}}$	$\text{ع} = \text{ل} - (\text{ن}-١)\text{ر}$ ، $\text{ه} = \text{ل} - (\text{ن}-١)\text{ر}$
٤	$\text{ه}_{\text{ل}}$ ، $\text{ع}_{\text{ر}}$	$\text{ع} = \frac{١}{٢}(\text{ه}+\text{ل})$ ، $\text{ر} = \frac{\text{ل}-\text{ه}}{\text{ن}-١}$
٥	$\text{ه}_{\text{ع}}$ ، $\text{ل}_{\text{ر}}$	$\text{ل} = \frac{\text{ع}-\text{ه}}{\text{ن}}$ ، $\text{ه} = \frac{\text{ع}-\text{ن}(\text{ل}-\text{ه})}{(\text{ن}-١)}$
٦	$\text{ل}_{\text{ع}}$ ، $\text{ه}_{\text{ر}}$	$\text{ه} = \frac{\text{ع}-\text{ل}}{\text{ن}}$ ، $\text{ر} = \frac{\text{ع}-\text{ن}(\text{ل}-\text{ه})}{(\text{ن}-١)\text{ن}}$
٧	$\text{ه}_{\text{ل}}$ ، $\text{ع}_{\text{ن}}$	$\text{ع} = \frac{\text{ل}-\text{ه}}{\text{ر}}+\text{ن}$ ، $\text{ن} = \frac{\text{ع}-\text{ن}(\text{ل}+\text{ه})}{(\text{ل}-\text{ه}+\text{ر})}$
٨	$\text{ه}_{\text{ع}}$ ، $\text{ر}_{\text{ن}}$	$\text{ع} = \frac{\text{ه}+\text{ر}\pm\sqrt{(\text{ر}-\text{ه})^{٢}+٨\text{ر}\text{ع}}}{٢\text{ر}}$ ، $\text{ن} = \frac{\text{ه}-\text{ر}\pm\sqrt{(\text{ر}-\text{ه})^{٢}+٨\text{ر}\text{ع}}}{٢\text{ر}}$
٩	$\text{ل}_{\text{ع}}$ ، $\text{ه}_{\text{ن}}$	$\text{ع} = \frac{\text{ل}+\text{ه}\pm\sqrt{(\text{ل}+\text{ه})^{٢}-٨\text{ه}\text{ع}}}{٢\text{ه}}$ ، $\text{ن} = \frac{\text{ل}-\text{ه}\pm\sqrt{(\text{ل}+\text{ه})^{٢}-٨\text{ه}\text{ع}}}{٢\text{ه}}$
١٠	$\text{ه}_{\text{ل}}$ ، $\text{ع}_{\text{ر}}$	$\text{ع} = \frac{\text{ع}}{\text{ه}+\text{ل}}$ ، $\text{ر} = \frac{(\text{ل}-\text{ه})(\text{ل}+\text{ه})}{\text{ع}-(\text{ل}+\text{ه})}$

مسائل يطلب حلها من الطالب

مثال ٩٧ الاولى المطلوب تعيين الحد الاول وعدد الحدود من متوالية عددية اساسها ٨ وحدها الأخير ١٨٠ وحاصل جمعها ٩٤٥ ؟

الثانية المطلوب ادخال تسعة أواسط عددية بين أي حدين من المتوالية

٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ١٤ ، ١٧ ÷

الثالث-

الثالثة المطلوب معرفة عدد طابور مثلثي صفه الاول نفر واحد والثاني نفران والثالث ثلاثة وهكذا الى صف يكون عدد انفاره مساويًا ٥

الرابعة المطلوب ايجاد حاصل جمع حدود المتوالية الفردية ÷ ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ .. التي عدد حدودها ٥

الخامسة طريق بعيدة عن تل رمل بمقدار ٤٠ مترًا يراد ترميلها وقد عملت مقايسة ذلك فوجد انه يلزم لترميلها شحن مائة عربانه كل منها بعيدة عن مجاورتها بستة امتار بشرط ان يكون موضع العربانة الاولى على بعد من التل يساوي ٤٠ مترًا وان ترجع العربانة الاخيرة الى المحل الذي شحنت منه والمطلوب معرفة عدد الأمتار التي يقطعها سواق العربانات في ترميل الطريق المذكورة

السادسة راجل يقطع عشرة فراسخ في اليوم الواحد وفارس يقطع في اول يوم ثلاثة فراسخ ويزيد سيره في كل يوم عن سابقه فرسخين سارا في آن واحد والمطلوب معرفة عدد الأيام التي تمضي من ابتداء سيرهما لنقطة تلاقيهما والمسافة التي يقطعها كل منهما

في المتواليات التفسيرية أي الهندسية

كل متسلسلة مركبة من جملة حدود متتابعة خارج قسمة أحدها على سابقه ثابت أو كل حد منها مساوٍ لسابقه مضروبًا في كمية ثابتة تسمى متوالية والكمية الثابتة تسمى اساس المتوالية

ومقتضى حد تعريفها تكون متوالية تصاعدية أو تنازلية يجب أساسها أي يجب كونه أكبر من الواحد أو أصغر منه فحينئذٍ تكون المتوالية

∴ ٣ : ٦ : ١٢ : ٢٤ : ٤٨ : ٩٦ تصاعدية

والمتوالية

∴ ٦٤ : ٤ : ١ : ١/٤ : ١/١٦ : ١/٦٤ تنازلية

ويلفظ بها كالتلفظ بالمتوالية العددية وكل متوالية هندسية توضع هكذا

∴ ح : ى : هـ : و : ز : ح : ط : ..... ن

فاذا رمز بالحرف ر لاساسها وبالحرف ل لحدها الأخير المسبوق بحدود عددها م - ١ فحصل

ى = حر ، هـ = حر² ، و = حر³ ..... ن = حر^(م-١)

وحيث أن القانون ل = حر^(م-١) ..... (١) مشتمل على الكميات الاربع ح ، ر ، م ، ل يمكن تعيين احداها بمعرفة الثلاث الاخرى فاذاً يكون الحد الأخير من متوالية هندسية مساوياً لحاصل ضرب الحد الاول في الأساس مرفوعاً لدرجة مساوية لعدد الحدود السابقة له

فاذا اريد مثلاً تعيين الحد الثامن من المتوالية

∴ ٢ : ٦ : ١٨ : ٥٤

فانه يحصل ٢ × ٣^٧ = ٢ × ٢١٨٧ = ٤٣٧٤ وهو الحد الثامن المطلوب

ابراهيم

ولا الزيد

واذا اريد تعيين أحد الحدين فى عشرين من المتوالية

∴ ٦٤ : ١٦ : ٤ : ١ : $\frac{1}{4}$ فانه يخصص

$٦٤ \times (\frac{1}{4})^{١١} = \frac{٦٤}{٤^{١١}} = \frac{1}{٤^{٨}} = \frac{1}{٦٥٥٣٦}$ وهو الحد الثانى عشر المطلوب

ويستعمل القانون $ل = ح ر^{م-1}$ لادخال جملة حدود عددها م بين كميتين معلومتين ح ، ل ليتركب من الكل متوالية هندسية وحيث أن عدد الحدود المدخلة م يكون عدد حدود المتوالية المراد تحصيلها م + ٢ ويكون الحد الأخير منها $ل = ح ر^{م+2-1} = ح ر^{م+1}$ ومنها يستخرج الأساس المجهول ر فيكون

$$ر = \sqrt[م+1]{\frac{ل}{ح}}$$

أعنى أن الأساس يساوى جذر خارج قسمة الكميتين المعلومتين على بعضهما بدرجة تساوى م + ١

فاذا اريد مثلاً ادخال أربعة حدود بين العددين ٢ ، ٤٨٦ يوضع فى مقدار ر بدل م ، ل ، ح مقاديرها وهى ٤ ، ٤٨٦ ، ٢ فيؤول الى $ر = \sqrt[4]{\frac{٤٨٦}{٢}} = \sqrt[4]{٢٤٣} = ٣$ وتركب المتوالية هكذا

∴ ٢ : ٢ × ٣ : ٢ × ٣² : ٢ × ٣³ : ٢ × ٣⁴

∴ ٢ : ٦ : ١٨ : ٥٤ : ١٦٢ : ٤٨٦

حاصل ضرب كل حدين متماثلى الوضع من طرفى متوالية هندسية واحد

[illegible] متوالية

[illegible] : ح : و : ع : ط يحدث

[illegible] = ح × ر ، ع × ر = ط ومنها ينتج

ع × ر × ر = ح × ر × ر أو

ع × ر² = ح × ر² [illegible]

وتسمى [illegible] الحاصل بالقسمة [illegible]

[illegible] متوالية [illegible] يساوى بعد الرمز له بالحرف ع

ع = ح + ح ر + ح ر² + ح ر³ + ... + ح ر^{ن-١} ..... (٢)

ولتحويل هذا القانون الى الخصوصية [illegible] كل من طرفيه فى الأساس ر فيحدث

ع ر = ح ر + ح ر² + ح ر³ + ح ر⁴ + ... + ح ر^{ن-١} + ح ر^{ن} (٤)

وبطرح معادلة (٢) من معادلة (٤) يحدث

ع (ر - ١) = ح ر^{ن} - ح = ح (ر^{ن} - ١) ومنها يستخرج

ع = ح (ر^{ن} - ١) / (ر - ١) ..... (٣)

والآن ضع ل بدل الحد الأخير الذى مقداره ح ر^{ن-١} فى معادلة (٣) تؤول الى

ع = (ل ر - ح) / (ر - ١)

أعنى أن مجموع حدود متوالية هندسية يساوى خارج قسمة باقى طرح الحد الأول من حاصل ضرب الحد الأخير فى الأساس على باقى طرح الواحد من الأساس .

[illegible] متوالية هندسية [illegible] (٣)

[illegible] ، ح ، ح٢ ، [illegible] ع [illegible] ثلاث [illegible]

حيث يمكن تعيين [illegible] أن [illegible] آل [illegible] يتوقف على

قواعد أن كان أحد المجهولين ح الذي هو عدد حدود المتوالية فإن

يؤول الأمر إلى معادلة مشتملة على أس مجهول وكما لو كان المجهولان ح و ر

ل و ر فإنه يؤول الأمر إلى معادلة ذات درجة مساوية لعدد حدود

المتوالية

وإذا [illegible] (٤) المأخوذة من معادلة (٣) بواسطة القسمة آل الأمر

إلى معادلة ذات درجة مساوية ح - ١

وإذا كان الأساس [illegible] استعملت معادلة (٤) بدل معادلة (٣) لأنه

يحدث من معادلة (٣) أن ع مقدار غير معين أي أن ع = ∞

وأما معادلة (٤) فإنها تعطي له مقدارًا محدودًا أي أن ع = ح ح

وقد تقدم أن [illegible] ينشأ عن وجود مضروب مشترك فالمضروب

المشترك للمعادلة (٣) هنا هو (ر - ١) انظر (بند ٢١)

بند متى كان الأساس المرموز له بالحرف ر أصغر من الواحد أي كسرًا صارت المتوالية

تنازلية فحينئذ قانون (٣) يكتب هكذا

$$ع = \frac{ح(١ - ر^{ح})}{١ - ر} = \frac{ح}{١ - ر} - \frac{ح ر^{ح}}{١ - ر}$$

[illegible] ازداد العدد م شيأ فشيأ نقصت النسبة

$\frac{ح}{١-ر}$ [illegible] يمكن أخذ عدد م كبير بحيث يكون المقدار $\frac{ح م^{ن}}{١-ر}$

أقل من كمية معلومة مهما كانت فلذلك كلما أخذت حدودا أكبر من الحدود المتعاقبة للمتوالية

بالابتداء من الحد الأول ترتب مقدار ع من $\frac{ح}{١-ر}$ فاذا يمكن أخذ حدود كافية

ليكون حد من حدوها مختلفا عن $\frac{ح}{١-ر}$ بقدر ما يراد وعليه فيقال أن نهاية حاصل

جمع جملة حدود من المتوالية التنازلية بالابتداء من الحد الأول تكون مساوية للكسر

$\frac{ح}{١-ر}$ فاذا كان عدد حدود المتوالية لانهائيا كان حاصل جمعها مساويا $\frac{ح}{١-ر}$

أي أن حاصل جمع حدود متوالية تنازلية عدد حدودها لانهائي يساوي

خارج قسمة حدها الأول على فاضل الواحد والأساس

١٠٣ ويمكن تعيين هذا الحاصل من أول الامر بفرض المتوالية التنازلية التي عدد حدودها

لانهائي هكذا

∴ ح : ح ر : ح ر² : ح ر³ : ..... الخ ومنها يحدث

ح ر = ح ر ، ح ر² = ح ر ر ، ح ر³ = ح ر² ر ، .....

وبجمع هذه المتساويات الأخيرة طرفا الى طرف يحصل

ح ر + ح ر² + ح ر³ + ... الخ = (ح + ح ر + ح ر² + ... الخ) ر

وحيث أن الطرف الأول من هذه المتساوية الأخيرة يساوي حاصل جمع حدود

المتوالية المذكورة ما عدا الحد الأول أي يساوي ع − ح وأن الطرف الثاني

يساوي

يساوى مجموع حدود هندسية مكررة بقدر الأساس ر فيساوى ح ن يكون

ح − د = ح ر أو ح (١ − ر) = د ومنها يحدث

$$ح = \frac{د}{١ - ر}$$

وهو مقدار مجموع حدود المتوالية المذكورة لأنه اذا اجريت عملية القسمة على المقدار $\frac{١}{١ - ر}$ حدث ∴ د : د ر : د ر² : د ر³ : ..... الخ وهو ناتج غير مخالف للمتوالية ∴ د : د : د : د : د : ..... الخ المفروضة الا فى تبديل الحدود د ، د ، د ، .... الخ بمقاديرها المبينة بدالة الحد الاول والاساس

وهناك حالة غريبة حادثة من فرض د = ١ ، ر = ٢ فى المعادلة

$$\frac{د}{١ - ر} = د + د ر + د ر^٢ + ... \text{ الخ}$$

وهى أنه بعد اجراء الفرض المتقدم يحصل

$$\frac{١}{١ - ر} \text{ أو } -١ = ١ + ٢ + ٤ + ٨ + ... \text{ الخ}$$

وهو ناتج فاسد لان الطرف الاول من المعادلة المتقدمة سالب والثانى موجب واكبر من الاساس فلتصحيح هذا الناتج يلزم لحصول التعادل فى

$$\frac{د}{١ - ر} = د + د ر + د ر^٢ + ... \text{ الخ}$$

أن يكمل خارج القسمة فاذا اجرى العمل الى الحد الرابع من خارج القسمة مثلا وجد

$$\frac{د}{١ - ر} = د + د ر + د ر^٢ + د ر^٣ + \frac{د ر^٤}{١ - ر}$$

وباجراء الفرض المتقدم فى هذه المعادلة يحدث

[illegible]

[illegible] التنازلية غير المنتهية

[illegible] الخ

[illegible] مقدارا [illegible] فتحصل

[illegible]

[illegible] التنازلية غير المنتهية

[illegible]

[illegible] بدل [illegible] مقدارا [illegible] فيتحصل

[illegible]

[illegible] الكسر دائر بسيط بواسطة القانون المعد لايجاد

[illegible] التنازلية غير منتهية لان الكسر الدائر البسيط

[illegible] مثلا يمكن وضعه بهذه الصورة

[illegible] + ٣٢٤/١٠٠٠ + ٣٢٤/١٠٠٠٠٠٠ + ٣٢٤/١٠٠٠٠٠٠٠٠٠ + ... الخ

[illegible] الكسر المذكور حينئذ الى متوالية تنازلية غير منتهية مجموع حدودها

يساوى ع = ٣٢٤/١٠٠٠ ÷ ١ − ١/١٠٠٠ = ٣٢٤/٩٩٩ وهو مقدار الكسر الاعتيادى

الكافى

[illegible] الدائر البسط المعروف

ولنكن تعيين كم اعتيادي مكافي لكسر [illegible] معلوم عدد [illegible]

[illegible] متوالية تنازلية غير منتهية [illegible]

[illegible] يكون أصغر من [illegible]

[illegible] مائة مرة فاذا يكون الكسر الدائر المركب [illegible]

[illegible]

مسائل في الاسعد المتوالي [illegible]

[illegible] الاولى لما مخترع [illegible] طلب جائزة [illegible] وضع له في الاولى حبة قمح وفي الثانية حبتان وفي الثالثة اربع وفي الرابعة ثمان [illegible] أي أن يوضع في كل خانة الحبة ضعف سابقتها الى ان تتم الستين خانة [illegible] الحب الذي يأخذه المخترع المذكور

فالجواب أن عدد الحب المطلوب يساوي حاصل جمع حدود متتابعة هندسية معلوم منها $ح = ١$ و $ر = ٢$, $ن = ٦٤$ فاذا يكون

$$ع = \frac{ح(ر^{ن}-١)}{ر-١} = \frac{٢^{٦٤}-١}{٢-١} = ٢^{٦٤}-١ = ١٨٤٤٦٧٤٤٠٧٣٧٠٩٥٥١٦١٥$$

ومن المعلوم في التجاريب ان المليجرام أي العشرة الالاف جرام تساوي ٦١٠٠٠ حبة تقريبا فيكون مقدار ع مساويا ٣٠٢٦٧٢١٨٠٣٥٩٠٤٠ ميريلجراما وحيث كان ثمن المليجرام يساوي فرنكين [illegible]

١٤١٣٥ ٢٣٦٠٧١٨٠٨٠ فونكا

الثانية مريض وهب لمريض آخر في مرض موته عبدًا له فوهبه الآخر في مرض موته للاول ولا شيء لهما سواه وحيث أن هبة مرض الموت لا تنفذ الا في الثلث ان كانت لغير وارث وله واجازها باقي الورثة يكون للموهوب له $\frac{2}{3}$ العبد وللواهب ثلثاه وهبته للموهوب له يرجع للواهب من هذا الثلث ثلثه وبناء عليه فقد زاد ماله وزادت هبته للموهوب له ومتى زادت هبة الموهوب له زاد مال الواهب الاول وبناء عليه يزيد مال الموهوب له وهكذا فاذًا يلزم الدور والمطلوب تعيين ما يخص كلًا من المريضين في العبد المذكور

فالجواب أن يفرض ثمن العبد أو نفسه مساويًا للواحد فيكون مقدار ما وهبه الاول منه مساويًا $\frac{1}{3}$ ومقدار هبة الموهوب له مساوية ثلث الثلث وبناء عليه تكون حصة الواهب الاول $\frac{2}{3} + \frac{1}{9}$ وحصة الموهوب له $\frac{1}{3} - \frac{1}{9}$ وحيث زاد مال الواهب الاول ثلث الثلث أي $\frac{1}{9}$ يرجع للواهب الثاني ثلث $\frac{1}{9}$ أي $\frac{1}{27}$ فاذن تكون

حصة الواهب الأول $\frac{2}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27}$

وحصة الواهب الثاني $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27}$

وحيث زاد مال الواهب الثاني بمقدار ثلث التسع اي $\frac{1}{27}$ يرجع للواهب الاول منهما ثلثها وهو $\frac{1}{81}$ فاذًا تكون

حصة الواهب الاول $\frac{٢}{٣} - \frac{١}{٩} + \frac{١}{٢٧} - \frac{١}{٨١}$

وحصة الواهب الثانى $\frac{١}{٣} - \frac{١}{٩} + \frac{١}{٢٧} - \frac{١}{٨١}$

وحيث زاد للواهب الاول $\frac{١}{٨١}$ من العبد يرجع للواهب الثانى منه ثلثه أى $\frac{١}{٢٤٣}$ وبناء عليه تكون

حصة الواهب الاول $\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٩} - \frac{١}{٢٧} + \frac{١}{٨١} - \frac{١}{٢٤٣}$

وحصة الواهب الثانى $\frac{١}{٣} - \frac{١}{٩} + \frac{١}{٢٧} - \frac{١}{٨١} + \frac{١}{٢٤٣}$ وهكذا

فقد نشأ من هذه الهبة الدور والتسلسل فاذاً تكون حصة كل منهما مساوية لفاضل حاصلى جمعى متواليتين تنازليين غير نهائيين فمتواليتا الواهب الثانى

$\frac{١}{٣} : \frac{١}{٢٧} : \frac{١}{٢٤٣} : \ldots\ldots$ لخ و $\frac{١}{٩} : \frac{١}{٨١} : \ldots\ldots$ لخ

ومنها ينتج أن حصته الحقيقية مساوية $\frac{٣}{٨} - \frac{١}{٨} = \frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$

فقد آل الثلث الذى هو حصة الواهب الثانى الى ربع وبناء عليه تكون حصة الواهب الاول ثلاثة ارباع

فاذا اريد تعيين حصة الواهب الأول اجرى العمل المذكور فى تعيين حصة الواهب الثانى

الثالثة أحد المصورين عنده ٨ صور يريد بيعها فدفع له فى كل واحدة ١٥٠ غرشاً مرة واحدة ثم دفع له فى أقلها حسناً ثمن قدره خمسة غروش

[illegible] بتضعيف الثلث الى الثامنة والمراد معرفة

[illegible]

(الجواب ان البيع الثانى ربح)

وجرة بر ميل من النبيذ يحتوى على مائة اقة صار يؤخذ منه كل يوم اقة واحدة ويضاف اليه اقة ماء بدلها والمطلوب معرفة عدد مرات تكرار هذا الفعل حتى لا يبقى من النبيذ الا الربع

(الجواب أنه لابد من تكرار الفعل ١٨٣ مرة)

فى المتباينات

لما كانت شروط مناقشة مسئلة مؤسسة فى الغالب على المتباينات لزم بيان قواعدها ونتائجها أن نطبق عليها المزيد اختصارها قواعد التحويلات التى اجريت على المعادلات

هذا وان كانت القواعد التى تبنى عليها هذه التحويلات بديهية لا تحتاج لتوضيح الا انه اقتضى الحال توضيحها هنا تجنبا للوقوع فى التحويلات غير الصحيحة عند ما يكون طرفا المتباينة سالبين

ومن البديهى أنه متى كانت كميتا ح ، ى موجبتين وكان ح > ى كان الفاضل ح - ى موجبا ومبينا هكذا ح - ى > ٠

ومتى كانت كمية ح موجبة و ى سالبة كان ح > ى لان الكمية الموجبة

[illegible]

[illegible]

[illegible] الا اذا كان [illegible]

[illegible] ويكون الفرق [illegible]

[illegible] ومن المعلوم ان الفرق [illegible]

يكون فيها الفرق [illegible] فاما [illegible]

[illegible] دائما على شرط [illegible] اكان [illegible]

يمكن بيان الخواص الأصلية للمتباينات [illegible]

المتباينة لا تتغير متى ضم لطرفيها كمية واحدة أو طرح منها كمية واحدة [illegible]

فرضت المتباينة [illegible] وصايت [illegible] لا تتغير

لان الفرق [illegible] لما كان موجبا كان الفرق [illegible]

موجبا أيضا

وينتج من هذه القاعدة انه اذا اريد تحويل حد من أحد طرفى متباينة [illegible]

الآخر غيرت علامته

ومتى غيرت علامات حدود طرفى متباينة قلبت شارتها اى تلك بخلاف

ماكان فى الطرف الأول الى الثانى وماكان فى الثانى الى الاول

ولا تتغير المتباينة متى ضرب كل من طرفيها فى كمية واحدة موجبة أو قسم كل منهما عليها

فاذا فرضت الكمية الموجبة المعلومة م آلت المتباينة ح > ء الى

ح م > ء م ، $\frac{ح}{م} > \frac{ء}{م}$ لانه لما كان الفرق ح - ء موجبًا كان حاصل ضربه فى م أو خارج قسمته عليه موجبًا أيضًا أعنى ان كلا من

م ح - ء م ، $\frac{ح}{م} - \frac{ء}{م}$ يكون موجبًا

ويمكن البرهنة أيضًا على هذه القاعدة بأن يقال أن حاصل ضرب الكميتين ح ، ء فى الكمية الموجبة م أو خارج قسمتهما عليها لا يختلف فى العلامة عن الكميتين المفروضتين وتكون النسبة بين أصلى حاصل الضرب أو خارج القسمة كالنسبة بين الكميتين ح ، ء المذكورتين وتحت ضرب طرفا متباينة فى كمية سالبة أو قسما عليها قلبت اشارتها لان هذا يؤول الى ضرب المتباينة فى كمية مطلقة وتغيير علامات جميع حدودها

بند ١٠٩ ومتى كان المجهول الداخل فى متباينة بدرجة أولى أمكن تحويلها الى صورة بحيث يكون هذا المجهول داخلاً فى احد الطرفين بمكرر ما وللواحد كما تقدم فى حل المعادلة ذات الدرجة الاولى

فاذا فرضت المتباينة

[illegible]

وحدث المقام [illegible] في العدد [illegible] الى

[illegible] س − ٨

وبتحويل الحدود المشتملة على المجهول س الى طرف والحدود المعلومة الى الآخر يتحصل

[illegible] س − [illegible] − ٨ أو ٥ س ١٤

وبقسمة كل من طرفيها على [illegible] يحدث

س > ٥/٦

وباجراء عمل مشابه للمتقدم على متباينة ٧/٢ − ٥/٤ س < ٨ − ٤ س يتحصل

س < ١٤/٩

وكذا اذا اجرى العمل المتقدم على المتباينة ٤٢ − ٥ س < ١٠ − ٨ س

يتحصل س < −١١

فاذا فرض للمجهول الناتج من كل من المتباينات الثلاث مقادير فالمجهول الناتج من الاولى لا يفرض له الا المقادير التي تزيد عن المقدار ١٤/٥ أو ٢ ٥/٥ وهو النهاية الصغرى له

واما مجهول المتباينة الثانية فلا تفرض له الا المقادير التي دون المقدار ٨٤/٩ أي ٩ ١/٩ وهو النهاية الكبرى له

وما مقدار س ، فهو نهاية تقارب لمجهول المتباينة الثالثة وينتج من
المقادير المفروضة للمجهول س تكون كانت رقيقة سابقة تزيد عن ١
فاذا كان المجهول س محققاً للمتباينتين الاولين معاً كانت مقدار س محصور
بين $\frac{٤}{٩}$ ، $\frac{١}{٩}$ واذا كان محققاً للمتباينة الثانية والثالثة معاً
كان محققاً للشرط س < -١١ وبالجملة فلا يوجد مقدار للمجهول س
يكون محققاً للمتباينة الاولى والثالثة معاً

ب - ونعتبر الآن حالة دخول مجهولى س ، ص بدرجة اولى فى المتباينتين

$$٢س - ٢ص > ٥ \quad و \quad ٥س + ٣ص < ١٦$$

فينتج منهما

$$س > \frac{٥ + ٢ص}{٢} \quad , \quad س < \frac{١٦ - ٣ص}{٥}$$

فاذا فرض للمجهول ص أى مقدار اختيارى أمكن أن يفرض للمجهول س
جميع المقادير التى تزيد عن اكبر الكميتين

$$\frac{٥ + ٢ص}{٢} \quad و \quad \frac{١٦ - ٣ص}{٥}$$

ويستنتج أيضاً من المتباينتين المذكورتين أن

$$ص < \frac{٣س - ٥}{٢} \quad , \quad ص < \frac{١٦ - ٥س}{٣}$$

ويلزم لتحقيق ذلك أن يكون

$$\frac{٣س - ٥}{٢} < \frac{١٦ - ٥س}{٣}$$

ومن

[illegible] أن س > $\frac{٤٧}{١٩}$

[illegible] يكون أن يفرض للمجهول س غير المقادير التي هي من $\frac{٤٧}{١٩}$ أعني

[illegible] ولا يجوز من مقادير س المطابقة شيء من مقادير س إلا

[illegible] الصورة بين النهايتين المتقدمتين

[illegible] من المتباينات ح > ء ، ح' > ء' ، ح'' > ء'' أن

[illegible] ح'' + ... > ء + ء' + ء'' + ...

[illegible] وق ح − ء ، ح' − ء' ، ح'' − ء'' لما كانت كلها موجبة كان حاصل

[illegible] هو ح − ء + ح' − ء' + ح'' − ء'' + ... أي

(ح + ح' + ح'' + ...) − (ء + ء' + ء'' + ...) موجب

[illegible] وإذا كانت الكميات ح ، ح' ، ح'' ، ..... ، ء ، ء' ، ء'' ، .....

[illegible] من المتباينات ح > ء ، ح' > ء' ، ح'' > ء'' ، .....

[illegible] المتباينة ح ح' ح'' ... > ء ء' ء'' ... .

[illegible] كان كل من خوارج قسمة $\frac{ح}{ء}$ ، $\frac{ح'}{ء'}$ ، $\frac{ح''}{ء''}$ أكبر من الواحد

[illegible] حاصل ضربها في بعضها وهو $\frac{ح ح' ح'' .....}{ء ء' ء'' .....}$ أكبر من الواحد أيضًا

وإن كانت الكميات ح ، ح' ، ح'' ، ..... ، ء ، ء' ، ء'' ، ..... كلها غير موجبة

استحال تحقيق ما تقدم لأنه إذا فرضت المتباينتان ٨ > ٥ ، −٣ > −٤

كان حاصل ضرب طرفيهما الأولين −٢٤ وحاصل ضرب طرفيهما الآخرين

[illegible] يكون خاص [illegible] أكبر من الثاني وحيث أن هذا من المستحيلات

[illegible] جمع [illegible] سبق عامًا

وإذا كانت الكتب [illegible] موجبتين فإنه ينتج من متباينة ح > ء المتباينة

ح' > ء' وإذا كانت كلتا الكميتين ح ، ء سالبة تستحال لجواز ما تقدم

لأنه إذا فرضت المتباينة −٣ > −٤ تحصل بناء على ما ذكر (−٣)² > (−٤)²

أعني ٩ > ١٦ وهذا محال

دعوى نظرية

عند ١١٢ إذا فرضت الكسور $\frac{ح}{ء}$ ، $\frac{ح'}{ء'}$ ، $\frac{ح''}{ء''}$ ذوات بسوط حيثما اتفق ومقامات

موجبة كان الكسر $\frac{ح + ح' + ح'' + \cdots}{ء + ء' + ء'' + \cdots}$ وسطًا متناسبًا بينها أعني أن

مقداره يكون محصورًا بين أكبرها وأصغرها

لأنه إذا جعل ك رمز لكمية أكبر من أكبر هذه الكسور ، كَ لكمية

أصغر من أصغرها حدث

$\frac{ح}{ء} < ك$ ، $\frac{ح'}{ء'} < ك$ ، $\frac{ح''}{ء''} < ك$ ، ..... و

$\frac{ح}{ء} > كَ$ ، $\frac{ح'}{ء'} > كَ$ ، $\frac{ح''}{ء''} > كَ$ و .....

وينتج من ذلك

$ح < ء ك$ ، $ح' < ء' ك$ ، $ح'' < ء'' ك$ ، ..... و

$ح > ء كَ$ ، $ح' > ء' كَ$ ، $ح'' > ء'' كَ$ و .....

وحينئذ يكون

وحينئذٍ يكون

ه + ه′ + ه″ + ... < (د + د′ + د″ + ...) ك ن

ه + ه′ + ه″ + ... > (د + د′ + د″ + ...) ك″

ومن هنا يحدث

$\frac{ه + ه' + ه'' + \cdots\cdots}{د + د' + د'' + \cdots\cdots} < ك$ ن

$\frac{ه + ه' + ه'' + \cdots\cdots}{د + د' + د'' + \cdots\cdots} > ك''$ وحينئذ يثبت المطلوب

مسائل تحل بواسطة المتباينات

الاولى ما العدد الذى اذا طرح من ضعفه ٥ كان الباقى أكبر من ٢٥ واذا طرح من ثلاثة امثاله ٧ كان الباقى أكبر من ضعفه زائداً ١٣ لحل هذه المسئلة يقال اذا رمز للعدد المجهول بالرمز س تحصل

٢س − ٥ > ٢٥

٣س − ٧ > ٢س + ١٣ ومنهما ينتج

س > ١٥ ، س > ٢٠

أعنى أن كل عدد أكبر من ٢٠ يكون حلاً للمسئلة وحينئذ يكون عدد الحلول غير منته

الثانية ما العدد الذى اذا طرح من ضعفه ٥ كان باقى الطرح أكبر من ٢٥ واذا طرح من ثلاثة امثاله ٧ كان الباقى أصغر من ضعف

ثالثة ١٣

لحل هذه المسئلة يقال اذا رمز للعدد المجهول بالرمز س تحصل

٢س − ٥ > ٢٥ و ٣س − ٧ < ٢س + ١٣ ومنهما يحدث

س > ١٥ و س < ٢٠

أعني أن مقدار المجهول س يكون محصورًا بين العددين ١٥ و ٢٠ ويكون عدد الحلول محدودًا

الثالثة ما العدد الذي اذا نقص من ضعفه ٥ كان الباقي أصغر من ٢٥ واذا نقص من ثلاثة امثاله ٧ كان الباقي أكبر من ضعفه زائدًا ١٣

لحل هذه المسئلة يقال اذا رمز بالرمز س للعدد المجهول تحصل

٢س − ٥ < ٢٥ و

٣س − ٧ > ٢س + ١٣ ومنهما يحدث

س < ١٥ و س > ٢٠

وحيث أن هذا غير ممكن فالمسئلة مستحيلة

الرابعة سئل احد الرعاة عن عدد ما يرعاه من الغنم فأجاب أنها اذا نقص من ضعف غنمه ٥ كان الباقي أكبر من ٢٥ واذا نقص من ثلاثة امثاله ٧ كان الباقي أصغر من ضعفه زائدًا ١٣ والمطلوب معرفة عدد ما يرعاه من الغنم

لذلك يقال اذا رمز لعدد الحمير [illegible] تحصل

٢س − ٥ > ٢٥ ، ٣س − [illegible] < [illegible] ومنهما ينتج

س > ١٥ ، س < [illegible]

وحينئذ فجميع المقادير المحصورة بين ١٥ و [illegible] تكون حلاً للمسئلة وحيث أن الحل المطلوب صحيح فيكون لهذه المسئلة اربعة حلول هي

١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩

الخامسة سئل رجل عن عمره فأجاب أنه اذا ضم لثلاثة امثاله ٢ كان الحاصل أكبر من ضعفه زائداً ٦١ واذا طرح من خمسة امثاله ١٨ كان الباقي أصغر من أربعة امثاله مضافاً اليه ٤٢

لذلك يقال اذا رمز لعمره بالرمز س تحصل

٣س + ٢ > ٢س + ٦١

٥س − ١٨ < ٤س + ٤٢ ومنهما يحدث

س > ٥٩ ، س < ٦١

أعني أن مقدار عمره يكون محصوراً بين ٥٩ و ٦١ فان كان العمر المطلوب تعيينه عدداً صحيحاً كان ٦٠ سنة بلا خلاف

في الكسور المتسلسلة

بند ١١٢ كل مقدار مركب من عدد صحيح ومن كسر بسطه صحيح ومقامه مركب من صحيح

إذا كسر بسطه صحيح ومقامه مركب من صحيح مضافاً اليه كسر بسيطه صحيح ومقامه كذا يسمى كسراً متسلسلاً

مثلاً الكمية

$$\text{ح} + \cfrac{\text{ه}}{\text{د} + \cfrac{\text{و}}{\text{ه} + \cfrac{\text{ز}}{\text{و} + \cfrac{\text{ح}}{\text{ز} + \text{ك}}}}}$$

تسمى كسراً متسلسلاً سواء كانت الكميات ح، د، ه، و..... ك، ح، ز، ه..... الدالة على اعداد صحيحة موجبة أو سالبة وباجراء عمليات الحساب الموجودة في هذه الكمية يتوصل الى كسر اعتيادي مساوٍ لقيمة الكسر المتسلسل

فاذا فرض الكسر المتسلسل $\text{٣} + \cfrac{\text{٤}}{\text{٥} + \cfrac{\text{١}}{\text{١} + \cfrac{\text{٣}}{\text{٤}}}}$ تحصل على التوالي

$$\text{١} + \frac{\text{٣}}{\text{٤}} = \frac{\text{٧}}{\text{٤}} \ , \quad \frac{\text{١}}{\text{١} + \frac{\text{٣}}{\text{٤}}} = \frac{\text{٤}}{\text{٧}} \ , \quad \text{٥} + \frac{\text{١}}{\text{١} + \frac{\text{٣}}{\text{٤}}} = \text{٥} + \frac{\text{٤}}{\text{٧}} = \frac{\text{٣٩}}{\text{٧}} \ \text{و}$$

$$\frac{\text{٤}}{\text{٥} + \frac{\text{١}}{\text{١} + \frac{\text{٣}}{\text{٤}}}} = \frac{\text{٤}}{\frac{\text{٣٩}}{\text{٧}}} = \frac{\text{١٤}}{\text{٣٩}} \ , \quad \text{٣} + \frac{\text{٤}}{\text{٥} + \frac{\text{١}}{\text{١} + \frac{\text{٣}}{\text{٤}}}} = \text{٣} + \frac{\text{١٤}}{\text{٣٩}} = \frac{\text{١٢١}}{\text{٣٩}}$$

لكنه يفرض لسهولة العمل أن نبسط كل من الكسور التي يتركب منها الكسر المتسلسل يكون مساوياً للواحد أعني أنه يفرض أن كلاً من ح، ز، ه..... يكون مساوياً للواحد وحينئذٍ يؤول الكسر المتسلسل المذكور الى

$$\text{ح} + \cfrac{1}{\text{د} + \cfrac{1}{\text{هـ} + \cfrac{1}{\text{و} + \cfrac{1}{\text{ى}}}}}$$

[illegible] على عدد صحيح [illegible] وحدة

[illegible] لكسور المتسلسلة تحدث بالصورة المتقدمة عند ما يراد تحويل كمية كسرية أو كمية غير جذرية الى عدد بحيث يكون مقداره مقربا بأقل من الوحدة لأنه اذا اريد تقدير كمية حينما اتفق كالكمية التي لا يمكن بيانها بعدد صحيح فانه يبحث في مبداء الأمر عن العدد الصحيح الذي يقرب من مقدارها وليكن ح مثلاً فيكون الفرق س − ح كسرًا اقل من الواحد ويرمز له بالكسر $\frac{1}{\text{ص}}$ بفرض ص عددًا صحيحًا اكبر من الواحد ثم يبحث عن العدد الصحيح د الذي يقرب من مقدار ص فيكون الفرق ص − د أقل من الواحد ويرمز له بالكسر $\frac{1}{\text{ع}}$ بفرض ع عددًا صحيحًا اكبر من الواحد وعلى هذا المنوال يتحصل

$$\text{س} = \text{ح} + \frac{1}{\text{ص}}\ ,\ \text{ص} = \text{د} + \frac{1}{\text{ع}}\ ,\ \text{ع} = \text{هـ} + \frac{1}{\text{ر}}\ ,\ \text{ر} = \text{و} + \frac{1}{\text{ح}}\ \text{و}$$

ومن هنا ينتج

$$\text{س} = \text{ح} + \cfrac{1}{\text{د} + \cfrac{1}{\text{هـ} + \cfrac{1}{\text{و} + \cfrac{1}{\text{ح}}}}}$$

فان كانت احدى هذه الكميات س و ص و ع و ر و ح مبينة بعدد صحيح

[illegible] الكسر غير [illegible]

[illegible] يراد تحويلها لكسر متسلسل مبسوط بالكسر الاعتيادي

[illegible] من عددين صحيحين فيكون العدد الصحيح الذي يقرب

[illegible] الموازي قسمة د على و فاذا رمز لهذا الخارج بالرمز

[illegible] نحصل

[illegible] $= د + \frac{1}{\frac{ه}{و}}$

[illegible] قسمة و على ه بالرمز د′ والباقي بالرمز و′ نحصل

[illegible] $و + \frac{و}{ه} = د′ + \frac{1}{\frac{ه}{و}}$

[illegible] أنه يلزم لتحويل كسر اعتيادي الى متسلسل أن تجرى على حدوده

[illegible] عملية ايجاد القاسم المشترك الاعظم بين عددين مفروضين وذلك

[illegible] أن يبدأ باجراء قسمة البسط على المقام

[illegible] الخوارج القسمة المتوالية الناتجة من ذلك بالرموز د، د′، ه، و′...

[illegible] الكسر المتسلسل الذي أداليه الكسر الاعتيادي هكذا

$$د + \frac{1}{د′ + \frac{1}{ه + \frac{1}{و′ + \text{الخ}}}}$$

[illegible] بحصر بهذه المثابة

$$= \frac{1103}{887}$$

$$\frac{١١٠٣}{٨٨٧} = ١ + \frac{١}{٤ + \frac{١}{٩ + \frac{١}{\cdots}}}$$

وحيث أن البحث عن القاسم المشترك الأعظم بين عددين [illegible]
بل الى خارج قسمة مبين بعد صحيح فيمكن تحويل كمية منفصلة الى كسر
ذلك كل كسر متسلسل منته يمكن تحويله الى كمية منطقة [illegible]
متى كان كسر متسلسل محدوداً أمكن تحويله دائماً الى كسر [illegible]
القيمة ويؤخذ من ذلك أنه متى أريد تحويل كمية غير جذرية [illegible]
كان هذا الكسر غير منته

بند ١١ لبيان تحويل كمية غير جذرية الى كسر متسلسل كالكمية

$$\frac{٣ + \sqrt{٧}}{٢}$$

يقال حيث أن الجذر التربيعي للرقم ٧ محصور بين العددين ٢ ، ٣
فالكمية المفروضة تكون محصورة بين $\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٦}{٢}$ ويكون العدد الصحيح [illegible]
هي عليه هو ٢ وحينئذ يوضع

$$\frac{٣ + \sqrt{٧}}{٢} = ٢ + \frac{١}{ص} \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$\frac{١}{ص} = \frac{\sqrt{٧} - ١}{٢} \quad \text{أو} \quad ص = \frac{٢}{\sqrt{٧} - ١} = \frac{٢(\sqrt{٧} + ١)}{٦} = \frac{\sqrt{٧} + ١}{٣}$$

وحيث أن الجذر التربيعي للرقم ٧ محصور بين ٢ ، ٣ فيكون [illegible]

ص محصورًا بين $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٤}{٣}$ وحينئذ يوضع

$$ص = \frac{١+\sqrt{٧}}{٣} = ١ + \frac{١}{ع}$$ ومنها يحدث

$$\frac{١}{ع} = \frac{٢-\sqrt{٧}}{٣}$$ أو $$ع = \frac{٣}{٢-\sqrt{٧}} = ٢+\sqrt{٧}$$

وبإجراء عين العمل المتقدم يتحصل

$$ث = \sqrt{٧}+٢ = ٤ + \frac{١}{ر}$$ و

$$ر = \sqrt{٧}-٢$$ ، ومنها $$ر = \frac{١}{٢-\sqrt{٧}} = \frac{٢+\sqrt{٧}}{٣} = ١ + \frac{١}{ج}$$ و

$$ج = \frac{١-\sqrt{٧}}{٣}$$ ومنها $$ج = \frac{٣}{١-\sqrt{٧}} = \frac{١+\sqrt{٧}}{٢} = ١ + \frac{١}{ل}$$ و

$$ل = \frac{١-\sqrt{٧}}{٢}$$ ومنها $$ل = \frac{٢}{١-\sqrt{٧}} = \frac{١+\sqrt{٧}}{٣}$$ وحينئذ يكون ل = ص

وعلى ذلك فقد تحللت الكمية $\frac{٢+\sqrt{٧}}{٢}$ بموجب هذا الحساب

الى الكسر المتسلسل

$$١ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{٤ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{٤ + \text{ح}}}}}}}$$

الدورى حيث كانت المقامات الأربعة ١ ، ٤ ، ١ ، ١ دائرة مع العمل

١١٧ ولنعتبر الآن الكسر المتسلسل الحرفى

$$\cfrac{\text{ه} + \cfrac{١}{\text{د} + \cfrac{١}{\text{ج} + \cfrac{١}{\text{ب} + \cfrac{١}{\text{أ}}}}}}$$

$$\text{ح} + \cfrac{1}{\text{ى} + \cfrac{1}{\text{هـ} + \cfrac{1}{\text{و} + \text{ج}}}}$$

فيحصل بمقتضى قواعد الكسور

$$\text{ح} = \frac{\text{ح}}{1}\ ,\ \text{ح} + \frac{1}{\text{ى}} = \frac{\text{ح ى} + 1}{\text{ى}}\ ,\ \text{ح} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\text{هـ}} + \text{ح}} = \frac{(\text{ح ى} + 1)\text{هـ} + \text{ح}}{\text{هـ ح ى} + 1}$$

$$\text{ح} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\text{ى}} + \cfrac{1}{\text{هـ} + \cfrac{1}{\text{و}}}} = \frac{(\text{ح ى هـ} + \text{هـ} + \text{ح})\text{و} + \text{ح ى} + 1}{(\text{ى هـ} + 1)\text{و} + \text{ى}}$$

فاما الكسور $\frac{\text{ح}}{1}$ ، $\frac{\text{ح ى} + 1}{\text{ى}}$ ، $\frac{(\text{ح ى} + 1)\text{هـ} + \text{ح}}{\text{هـ ى} + 1}$ ، $\frac{(\text{ح ى هـ} + \text{هـ} + \text{ح})\text{و} + \text{ح ى} + 1}{(\text{ى هـ} + 1)\text{و} + \text{ى}}$

فهى المعروفة بالكسور المقربة أو الآئلة

وأما الكسور $\frac{\text{ح}}{1}$ ، $\frac{1}{\text{ى}}$ ، $\frac{1}{\text{هـ}}$ فتسمى بالكسور الكلية

وأما كميات ح ، ى ، هـ فتسمى فى بعض الأحيان بالمتوازيج غير تامة وسيأتى بيان سبب هذه التسمية

وبالتأمل فى الآئلات المتقدمة يشاهد أن بسط الآئلة الثالثة مركب من حاصل ضرب بسط الآئلة التى قبلها فى مقام الكسر المكمل الأخير زائدا بسط الآئلة التى قبلها بمرتبتين ومقام الآئلة المذكورة مركب من حاصل ضرب مقام الآئلة التى قبلها فى مقام الكسر المكمل الأخير زائدا مقام الآئلة التى قبلها بمرتبتين ويتركب كل من بسط ومقام الآئلة الرابعة بالكيفية التى

تتركب بها الآئلة الثالثة وبهذه المثابة تتركب كل آئلة

ولبيان تعميم هذه القاعدة يبرهن على انها اذا كانت موافقة لثلاث آئلات متوالية من أى مرتبة كانت فانها تكون موافقة للآئلة الرابعة التالية لها

ولذا نرمز للآئلات الاربع المتوالية بالرموز

$$\frac{ع}{ح} \ , \ \frac{ك}{ك''} \ , \ \frac{ر}{ر''} \ , \ \frac{ل}{ل''}$$

ثم نرمز بالرمز $ر''$ لمقام الكسر المكمل الأخير للآئلة $\frac{ر}{ر''}$ وبالرمز $ل''$ لمقام الكسر المكمل الأخير للآئلة $\frac{ل}{ل''}$ ثم نفرض أن

$$ر = ك ر'' + ع \quad , \quad ر' = ك' ر'' + ع'$$

فيحصل مقدار الآئلة $\frac{ل}{ل''}$ من $\frac{ر}{ر''}$ بأن يوضع فيها بدل $ر''$ الكمية $ر'' + \frac{1}{ل''}$ فيحدث

$$\frac{ل}{ل''} = \frac{ك(ر'' + \frac{1}{ل''}) + ع}{ك'(ر'' + \frac{1}{ل''}) + ع'} = \frac{ل''(ك ر'' + ع) + ك}{ل''(ك' ر'' + ع') + ك'} = \frac{ر ل'' + ك}{ر' ل'' + ك'} \ .$$

وحينئذ يشاهد أن الآئلة $\frac{ل}{ل''}$ لا تختلف فى التركيب عن الآئلات التى قبلها وبمثل هذا يبرهن على أن تركيب كل آئلة يكون حاصلاً بمقتضى هذه القاعدة وبناء عليه فهى مطردة .

فاذا اريد حساب آئلات الكسر المتسلسل .

$$1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}}$$

فانه يبدأ بتركيب الآئلتين الأوليين اللتين بواسطتهما تتركب الآئلات الآتية بعدهما بمقتضى القاعدة المتقدمة وعليه يتحصل

$$\frac{1}{1}\ ,\ \frac{5}{4}\ ,\ \frac{46}{37}\ ,\ \frac{97}{78}\ ,\ \frac{143}{115}\ ,\ \frac{240}{193}\ ,\ \frac{1103}{887}$$

وذلك بأن توضع على استقامة واحدة الخوارج غير التامة ٩ ، ٤ ، ١ ، ٦ ثم يضرب حد الآئلة الثانية وهما ٥ ، ٦ في ٩ ثم يضم على التوالي للحاصلين الناتجين من ذلك حد الآئلة الاولى وهما ١ ، ١ فيتحصل حد الآئلة الثالثة وهما ٤٦ ، ٣٧ ولايجاد حد الآئلة الرابعة يضرب حد الآئلة الثالثة وهما ٤٦ ، ٣٧ في ٤ ويضم للحاصلين على التوالي حد الآئلة الثانية أي يضم العدد ٥ للحاصل الاول والعدد ٤ للثاني فيتحصل حد الآئلة الرابعة المطلوبة وهما ٩٧ ، ٧٨

ولايجاد الآئلة الخامسة والسادسة والخ يجري العمل بهذه المثابة وحيث تكون الآئلة الأخيرة دالة دائماً على القيمة الحقيقية للكسر المتسلسل المفروض ومتى كان الكسر المتسلسل المفروض غير محتو على عدد صحيح أخذ المقدار

بند الآئلة الاولى

بند ١١٨ مقدار الكسر المتسلسل يكون محصورًا دائمًا بين آئلتين متواليتين ولذا نفرض الكسر المتسلسل الحرفى

$$\text{ه} + \cfrac{1}{\text{د} + \cfrac{1}{\text{ه} + \cfrac{1}{\text{و} + \cfrac{1}{\text{ح}}}}}$$

ثم نرمز لمقداره الحقيقى بالرمز س فيشاهد أن الآئلة الاولى $\frac{\text{ه}}{1}$ تكون اصغر من المقدار س حيث حذف الجزء الموجب $\frac{1}{\text{و} + \frac{1}{\text{ح}}}$ من مقدار س ويشاهد ايضًا أن الآئلة الثانية $\text{ه} + \frac{1}{\text{د}}$ تكون اكبر من س حيث انه قطع النظر فيها عن جزء من المقام $\text{د} + \frac{1}{\text{ه} + \frac{1}{\text{ح}}}$ وبمثل هذا يبرهن على باقى الآئلات الآتية

ويمكن البرهنة بوجه عام على منطوق هذه الخاصية بان يقال

لاستخراج مقدار س من مقدار $\frac{\text{ر}}{\text{ر}'}$ المساوى $\frac{\text{ك}\text{ر}'' + \text{ح}}{\text{ك}'\text{ر}'' + \text{ح}'}$ يغير فيه الرمز $\text{ر}''$ بالمقدار $\text{ر}'' + \frac{1}{\text{ل}'' + \frac{1}{\text{ح}}}$ الذى هو موجب دائمًا واكبر من الواحد فيحصل بعد جعل ص رمزًا للكمية $\text{ر}'' + \frac{1}{\text{ل}'' + \frac{1}{\text{ح}}}$

$$\text{س} = \frac{\text{ك}\text{ص} + \text{ح}}{\text{ك}'\text{ص} + \text{ح}'} \quad \ldots\ldots (1)$$

واذا طرحت الآئلتان $\frac{\text{ه}}{\text{ه}'}$ و $\frac{\text{ك}}{\text{ك}'}$ احداهما بعد الاخرى من كل من طرفى معادلة (١) حدث

$$س - \frac{ع}{ع'} = \frac{(ك ع' - ك' ع) س}{(ك' س + ع') ع'} \quad , \quad س - \frac{ك}{ك'} = \frac{ع ك' - ك ع'}{(ك' س + ع') ك'}$$

وبالتأمل في هاتين المتساويتين يشاهد أن فرقين $س - \frac{ع}{ع'}$, $س - \frac{ك}{ك'}$ متخالفان في العلامة فان كان س أكبر من $\frac{ع}{ع'}$ كان أصغر من $\frac{ك}{ك'}$ وان كان س أصغر من $\frac{ع}{ع'}$ كان أكبر من $\frac{ك}{ك'}$ وحيث أن الآثلة الأولى $\frac{ح}{ا}$ أصغر من س فتكون كل من الآثلات ذات المرتبة الفردية أصغر من مقدار الكسر المتسلسل وكل من الآثلات ذات المرتبة الزوجية أكبر منه

بند ١١٩ المقدار المطلق للفرق $س - \frac{ك}{ك'}$ أقل من المقدار المطلق للفرق $س - \frac{ع}{ع'}$ لان ص اكبر من الواحد , $ك'$ اكبر من $ع'$ وحينئذ تكون كل آثلة اقرب الى مقدار الكسر المتسلسل من الآثلة التي قبلها ولذا سميت الآثلات بالكسور المقربة وينتج من ذلك أن الآثلات ذات المرتبة الفردية يتكون منها متسلسلة تصاعدية وذات المرتبة الزوجية متسلسلة تنازلية

بند الفرق بين آثلتين متواليتين يساوي كسرا اعتياديا بسطه الواحد ومقامه حاصل ضرب مقام هاتين الآثلتين لانه اذا فرضت الآثلتان $\frac{ح}{ا}$, $\frac{ح+١}{د}$ كان الفرق بينهما مساويا $\frac{١}{د}$ أعني $\frac{ح+١}{د} - \frac{ح}{ا} = \frac{١}{د}$ وينتج هذا البرهان على باقي الفروق

ويمكن تعميم البرهنة على ذلك أيضا بأن يقال اذا كانت هذه القاعدة موافقة لآثلتين متواليتين من أي مرتبة كالآثلتين $\frac{ع}{ع'}$. $\frac{ك}{ك'}$ كانت كذلك

موافقة للآثلتين المتوالستين $\frac{ك}{ك'}$ ، $\frac{ر}{ر'}$ وحيث تقدم أن

$\frac{ر}{ر'} = \frac{ك'ر' + ع}{ك'ر' + ع'}$ فيكون

$$\frac{ر}{ر'} - \frac{ك}{ك'} = \frac{ك'ر' + ع}{ك'ر' + ع'} - \frac{ك}{ك'} = \frac{ع ك' - ع' ك}{ك'(ك'ر' + ع')}$$

ويؤخذ من الفرض $\frac{ك}{ك'} - \frac{ع}{ع'} = \pm \frac{1}{ك' ع'}$ أى $ك ع' - ع ك' = \pm 1$ وبناء عليه يكون $\frac{ر}{ر'} - \frac{ك}{ك'} = \mp \frac{1}{ك' ر'}$ أعنى $ر ك' - ك ر' = \mp 1$

١٤١ الآثلدت المركبة بمقتضى (بند ١١٧) هى كسور لا تقبل الاختصار لانه لو كان لحدى الآثلة $\frac{ع}{ع'}$ مضروب مشترك لكان يقسم كلاً من طرفى المتساوية $ع ك - ع' ك' = \pm 1$ ويكون بمقتضى ذلك قاسماً للواحد وهذا خلاف

١٤٢ وحيث تقدم أن مقدار الكسر المتسلسل محصور بين أى آثلتين متوالستين كالآثلتين $\frac{ك}{ك'}$ ، $\frac{ر}{ر'}$ مثلاً فيكون الفرق بين هذا المقدار والآثلة $\frac{ك}{ك'}$ دون الفرق بين الآثلتين $\frac{ك}{ك'}$ ، $\frac{ر}{ر'}$ وقد شوهد أن الفرق الأخير يساوى المقدار $\frac{1}{ك' ر'}$ فيكون الخطأ الحاصل فى أخذ آثلة بدل المقدار التقريبى للكسر المتسلسل دون المقدار $\frac{1}{ك' ر'}$ أى دون الواحد مقسوماً على حاصل ضرب مقام هذه الآثلة فى مقام التالية لها

ويمكن إيجاد نهاية الخطأ بغير دالة مقام الآثلة التالية للمفروضة لانه يتحصل بمقتضى ما تقدم $ر = ك' ر' + ع'$ وحيث أن خارج القسمة $ر'$ غير التام لا يكون دون الواحد ابداً فلا يزيد الكسر $\frac{1}{ر' ك'}$ فى النهاية عن $\frac{1}{ك'}$

$\frac{1}{ك^{2}(ك^{2}+ع)}$ ويكون الخطأ الحاصل أقل من هذا الكسر وحيث أن

$\frac{1}{ك^{2}(ك^{2}+ع)} < \frac{1}{ك^{2}}$ فلا مانع من جعل الكسر $\frac{1}{ك^{2}}$ نهاية للخطأ وهذه النهاية تؤثر على غيرها لكونها بسيطة

بند ١٤٣ يكفي لجعل الآثلة $\frac{ك}{ك^{2}}$ مختلفة عن مقدار كسر متسلسل بكية دون الكسر المعلوم $\frac{م}{ن}$ أن يكون $\frac{1}{ك^{2}} < \frac{م}{ن}$ فيحدث

$ك > \sqrt{\frac{ن}{م}}$ أو في النهاية $ك = \sqrt{\frac{ن}{م}}$

وينتج من ذلك أنه يمكن دائماً إيجاد المقدار الحقيقي أو المقرب لكمية معينة بكسر متسلسل لأنه إن كان الكسر المتسلسل منتهياً أمكن بيان مقداره بكسر اعتيادي وإن كان غير منته أمكن الوصول إلى مقدار مقرب بجعل مقام الآثلة كسراً بقدر ما يراد لكون مقامات الآثلات صحيحة لا تزال آخذة في الازدياد

بند ١٤٤ كل كسر متسلسل دائر يدل على أحد جذري معادلة ذات درجة ثانية مكررات حدودها منطقة

وللبرهنة على ذلك بوجه عام نفرض كسراً متسلسلاً مركباً من جزء غير دائر كسوره المكملة $\frac{ج}{1}$ و $\frac{ب}{1}$ ..... و $\frac{1}{ع}$ و $\frac{1}{ح}$ ومن جزء دائر كسوره المكملة $\frac{1}{م}$ و $\frac{1}{ن}$ ..... و $\frac{1}{ر}$ و $\frac{1}{ك}$ ثم نجعل ص رمزاً للجزء الدائر فيكون

$$\text{ص} = \text{ه} + \cfrac{1}{\text{ج} + \cfrac{1}{\text{ر}'' + \cfrac{1}{\text{ل}'' + \cfrac{1}{\text{ص}}}}} \qquad \text{س} = \text{ه} + \cfrac{1}{\text{د} + \cfrac{1}{\text{ك}'' + \cfrac{1}{\text{ع}'' + \cfrac{1}{\text{ص}}}}}$$

واذا جعل $\frac{\text{ر}}{\text{ل}}$ و $\frac{\text{ل}}{\text{ر}}$ رمزين للآثلتين المطابقتين للكسرين المكملين $\frac{1}{\text{ر}''}$ و $\frac{1}{\text{ل}''}$ فى مقدار ص و $\frac{\text{ك}}{\text{ع}}$ و $\frac{\text{ع}}{\text{ك}}$ رمزين للآثلتين المطابقتين للكسرين المكملين $\frac{1}{\text{ك}''}$ و $\frac{1}{\text{ع}''}$ فى مقدار س تحصل

$$\text{ص} = \frac{\text{ل ص} + \text{ر}}{\text{ر ص} + \text{ل}} \quad \text{و} \quad \text{س} = \frac{\text{ع ص} + \text{ك}}{\text{ك ص} + \text{ع}}$$

وبحذف ص من هاتين المعادلتين يتوصل الى معادلة ذات درجة ثانية محتوية على س الذى هو مقدار الكسر المتسلسل المفروض

ويلزم لمزيد الاختصار أن نحل بدل المعادلة ذات الدرجة الثانية الناتجة من حذف ص المخرج منها للمجهول س مقدار ان المعادلة

$$\text{ص} = \frac{\text{ل ص} + \text{ر}}{\text{ر ص} + \text{ل}} \quad \text{أو} \quad \text{ل ص} + (\text{ر} - \text{ل})\,\text{ص} - \text{ر} = 0$$

وحيث أن الحد الأخير من هذه المعادلة سالب فيكون أحد الجذرين سالبًا ولا يؤخذ غير الموجب وبواسطة مقدار ص الموجب يسهل تعيين المقدار الموافق للمجهول س

بند ١٤٥ يلزم فى بعض الأحيان تحويل كمية غير جذرية مبينة بكسر اعشارى الى كسر متسلسل وحيث أن المقدار الاعشارى لا يمكن أخذه فى هذه الحالة

بالضبط

بالضبط فينبغي أن يضم الرقم الأخير منه وبعد تحقيق نهايتين يحصر بينهما
المقدار الحقيقي للكمية غير الجذرية المفروضة ثم يجري العمل على كل من هاتين
النهايتين معًا ولا يؤخذ في الكسر المتسلسل غير الخوارج المتحدة في الطريقتين
مثلًا اذا اريد بيان النسبة الكسرية بحصر مقدار حقيقي لهذه النسبة
محصورًا بين مقدارين اعشاريين محتويين على خمسة ارقام عشارية
كالمقدارين ٣,١٤١٥٩ ، ٣,٤١٦٠٠ ثم يحول هذان المقداران
الى كسرين متسلسلين فتكون الخوارج غير التامة للكسر الاول ٣ ، ٧ ، ١٥
وللثاني ٣ ، ٧ ، ١٦ وينتج من ذلك أن الخارجين الأولين غير التامين
لمقدار ط المحول الى كسر متسلسل هما ٣ ، ٧ غير انه ان حصل شك في
الخارج الثالث غير التام هو ١٥ أو ١٦ أخذ مقدارا ط بأرقام
أعشارية تزيد في العدد عن المقدارين الاولين ليمتد الكسر المتسلسل
عن الكسر المكمل الثاني

في حل غير المعين للمعادلات ذات الدرجة الاولى

في حصول الصحيح للمعادلة بدرجة اولى كالمعادلة

$$\text{ص} + \text{س} = \text{هـ}$$

بند الغرض الاصلي من الحل غير المعين للمعادلات ذات الدرجة الاولى هو البحث

عن حلول المسائل ذات الدرجة الاولى التي منطوقها غير كاف حتى يكون عدد المعادلات عين عدد المجاهيل عند ما يفرض لهذه المجاهيل اعداد صحيحة موجبة أو سالبة أو موجبة فقط والمراد بالحلول الصحيحة الحلول التي تكون بها مقادير المجاهيل اعداد صحيحة

بند ١٨٧ ولذا نفرض المعادلة العمومية ح س + ء ص = هـ ذات الدرجة الاولى والمجهولين التي فيها ح ، ء ، هـ رموزاً لاعداد صحيحة موجبة أو سالبة فيمكن دائماً ان لا يكون لهذه الاعداد مضروب مشترك لانه ان كان لها مضروب مشترك امكن حذفه وحولت المعادلة المفروضة الى معادلة اخرى متحدة معها في الصورة الا انها اخصر منها فاذا تقرر هذا شوهد من أول وهلة انه اذا كان مكررا ح ، ء غير أوليين معاً لا يكون للمعادلة المفروضة حل صحيح لانه ان كان لهما مضروب مشترك كالمضروب م تحصل ح = حَ م ، ء = م ءَ (بفرض حَ ، ءَ عددين صحيحين) فاذا وضع بدل ح ، ء مقدارهما في المعادلة المتقدمة وقسم كل من طرفيها على المضروب م تحصل

حَ س + ءَ ص = هـ/م

فاذا فرض للمجهولين س ، ص مقادير صحيحة كما هو المطلوب كان الطرف الاول من هذه المعادلة صحيحاً وحيث أن طرفها هـ/م الثاني كمية كسرية

فهـ

فهي غير متحققة وينتج من ذلك أنه اذا كان مكررا ح ، د غير اوليين معا لا يكون للمعادلة حل صحيح

بند ١٢٨ ومتى كان مكررا ح ، د اوليين معا كان للمعادلة حس + دص = هـ حلول صحيحة لانه اذا فرضنا الكميات ح ، د ، هـ موجبة وحلت المعادلة المذكورة بالنسبة للمجهول س تحصل

$$س = \frac{هـ - دص}{ح}$$

فاذا رمزنا الرمز ع لعدد ما بحيث يكون هـ = حع - هـَ (هـَ هو كناية عن عدد موجب) واستعوض هـ بمقداره في مقدار س حدث

$$س = ع - \frac{هـَ + دص}{ح}$$

واذا فرض أن المجهول ص اخذ بالتوالي كلا من المقادير ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ح - ١ كانت البواقي المحادثة من قسمة هـَ + دص على ح غير متساوية وكل واحد منها اصغر من ح لانه لو جعل للمجهول ص مقداران مختلفان كل منهما أصغر من ح كالمقدارين م ، ن وبهما توصل الى باقيين متساويين لكان

هـَ + دم = ح ك + ر ، هـَ + دن = ح كَ + ر ومنهما يحدث

د (م - ن) = ح (ك - كَ)

وهذه المعادلة يؤخذ منها

$$\frac{ى(م-ن)}{ح} = ك - ك'$$

وحيث أن الطرف الثانى عدد صحيح فيكون الطرف الاول كذلك وبناء على ذلك يكون ى(م-ن) قابلاً للقسمة على ح وهذا محال لان ى اولى مع ح وكل من م، ن اصغر من ح ومن هنا يعلم أن احد البواقى الحادثة من قسمة هـ+ى ص على ح يكون صفراً وعليه فيكون للمجهول ص مقدار صحيح أقل من ح بواسطة يكون للمجهول س مقدار صحيح فاذا كانت المعادلة بهذه الصورة

ح س - ى ص = هـ فانه يستخرج منها

$$س = \frac{هـ + ى ص}{ح}$$

ثم يبرهن على الكسر $\frac{هـ + ى ص}{ح}$ بمثل ما برهن على الكسر المتقدم $\frac{هـ + ى ص}{ح}$ لكنه يلاحظ انه يمكن استخراج حلول المعادلة ح س - ى ص = هـ من حلول المعادلة ح س + ى ص = هـ وذلك بتغيير علامة المجهول ص ومن هنا يؤخذ أنه متى كان للمعادلة الأخيرة حلول صحيحة كان للاخرى كذلك

بند ١٦٩ ويمكن البرهنة على القضية المتقدمة فى البند السابق بواسطة خواص الكسور المتسلسلة بأن تفرض المعادلة

ح س + ى ص = هـ

تحل

ثم يحول الكسر $\frac{ع}{ك}$ الى كسر متسلسل ثم يرمز للآئلة التي قبل الاخيرة بالرمز $\frac{ح}{د}$ فان كانت مرتبة هذه الآئلة زوجية حدث

ح ع − د ك = ١ ويضرب كل من طرفيها في هـ يحدث

ح ع هـ − د ك هـ = + هـ

وبالمقارنة بين هذه المتساوية والمعادلة ح س + د ص = هـ يتأكد أن هذه المعادلة تتحقق بجعل المجهول س = ع هـ والمجهول ص = − ك هـ وان كانت مرتبة الآئلة $\frac{ع}{ك}$ فردية تحصر

ح ع − د ك = −١ ومنها يحدث

− ح ع هـ + د ك هـ = + هـ

وبناء على ذلك تتحقق المعادلة ح س + د ص = هـ بأن تجعل

س = − ع هـ , ص = ك هـ

وحينئذ يكون للمعادلة المفروضة حل صحيح

بند ١٤٠ متى علم حل صحيح للمعادلة ح س + د ص = هـ امكن [illegible] عدة حلول

لانه اذا فرض أن س = ءَ , ص = ءَ هو الحل المعلوم كان

ح ءَ + د ءَ = هـ وبطرح هذه المتساوية من المعادلة ح س + د ص = هـ

يتحصل

$$ح(س - ح') = د(ح' - ص)$$

ولتحقق هذه المعادلة بالمقادير الصحيحة للمجهولين س و ص يلزم أن يكون د قاسماً للحاصل ح(س - ح') وحيث كان د اولياً مع ح فيكون قاسماً للكمية (س - ح') فاذا رمز لخارج القسمة بالرمز و كان س - ح' = د و (بجعل و كناية عن عدد صحيح موجب او سالب) واذا استعوض في المعادلة المتقدمة س - ح' بالمقدار د و حدث

ح' - ص = ح و وحينئذ يكون

س = ح' + د و ، ص = ح' - ح و

وأي مقدار موجب أو سالب يفرض غير المعين و يؤخذ منه للمجهولين س و ص مقداران صحيحان ومحققان للمعادلة المفروضة

ويشاهد من القانونين المتقدمين بسهولة أن يوضع فيهما على التوالي بدل المتغير و أحد المقادير ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ..... لخ و ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... لخ

أنه ينتج من مقادير المجهول س متوالية عددية اساسها مكرر ص ومن مقادير المجهول ص متوالية رقية اساسها مكرر س

ويمكن بواسطة ما تقدم أيضاً ايجاد الحلول الصحيحة لمعادلة ذات درجة اولى ومجهولين

مثلاً اذا فرضت المعادلة

٢٤ س + ٦٥ ص = ٢٤٣

وحول $\frac{٦٥}{٢٤}$ الى كسر متسلسل وتكونت الآثلاث المتوالية كان $\frac{١٩}{٧}$ مقدار الآثلة التي قبل الأخيرة وحيث كانت زوجية المرتبة فيكون

٢٤ × ١٩ − ٦٥ × ٧ = ١ ومن هنا يحدث

٢٤ × ١٩ × ٢٤٣ − ٦٥ × ٧ × ٢٤٣ = ٢٤٣

وحينئذ يشاهد أن المعادلة المفروضة تتحقق بجعل

س = ١٩ × ٢٤٣ = ٤٦١٧ , ص = − ٧ × ٢٤٣ = − ١٧٠١

وبمقتضى ما تقدم في ($\frac{\text{بند}}{١٢٨}$) تتعين جميع الحلول الصحيحة للمعادلة المفروضة بواسطة القوانين

س = ٤٦١٧ + ٦٥ و , ص = − ١٧٠١ − ٢٤ و

. ق س = ٤٦١٧ − ٦٥ و , ص = − ١٧٠١ + ٢٤ و

$\frac{\text{بند}}{١٢٢}$ وهناك طريقة اخرى غير مؤسسة على القضايا المتقدمة بواسطتها يتوصل من أول وهلة الى القانونين اللذين منهما تعلم جميع الحلول الصحيحة لمعادلة ذات درجة اولى ومجهولين

. فاذا فرضت المعادلة ح س + د ص = هـ وجعل فيها ح = ١ وحلت بالنسبة للمجهول س تحصل

س = $\frac{هـ - د ص}{ح}$

و يرمز للخارج الصحيح من قسمة و على ه بالرمز ك وللباقي بالرمز ے

نحصل و = ه ك + ے ، س = - ك ص + $\frac{\text{ه} - \text{ے ص}}{\text{ه}}$

ولكي يحدث من المقدار الصحيح المفروض للمجهول ص مقدار صحيح للمجهول

س يلزم أن يكون $\frac{\text{ه} - \text{ے ص}}{\text{ه}}$ عددًا صحيحًا اذا رمزله بالرمز و نحصل

$\frac{\text{ه} - \text{ے ص}}{\text{ه}}$ = و ، س = - ك ص + و

واذا استخرج مقدار ص من المعادلة $\frac{\text{ه} - \text{ے ص}}{\text{ه}}$ = و وجعل ك

رمزًا للخارج الصحيح من قسمة ه على ے وجعل ےَ رمزًا للباقي نحصل

ه = ے ك + ےَ ، ص = $\frac{\text{ه} - \text{ه و}}{\text{ے}}$ = - كَ و + $\frac{\text{ه} - \text{ےَ و}}{\text{ے}}$

وبمثل ما تقدم يحصل ايضًا

$\frac{\text{ه} - \text{ےَ و}}{\text{ے}}$ = وَ ، ص = - كَ و + وَ

وبتوالي هذا العمل على العددين ه ، و يشاهد أنه لا يختلف عن العمل

الذي يجرى لايجاد القاسم المشترك الأعظم بينهما وحيث أنهما اوليان

معًا فيتوصل الى باقي مساوٍ للواحد

فاذا كان هذا الباقي حادثًا من تقسيم ے على ےَ كان

ے = ےَ كَ + ١ وعليه فيكون و = $\frac{\text{ه} - \text{ے وَ}}{\text{ے}}$ = - كَ وَ + $\frac{\text{ه} - \text{وَ}}{\text{ے}}$

ومن فرض $\frac{\text{ه} - \text{وَ}}{\text{ے}}$ = وً يحدث و = - كَ وَ + وً ، وَ = ه - ےَ وً

ولتحصيل مقداري س وص بدالة غير المعين وً يوضع المقدار ه - ےَ وً

[illegible] ق في [illegible] ر = −ك″ هـ + إ″ ي + [illegible]

س = −ك″ هـ + ي″ [illegible] هـ [illegible] في المعادلة

ص = −ك′ و + و″ فتؤول الى

س = ك′ ك″ هـ + هـ − (ي ك″ + ي″ ك′) − و″

ولاستخراج مقدار س بوضع بدل ص و [illegible] في المعادلة

س = −ك ص + و فيحدث

س = −هـ (ك ك′ ك″ + ك + ك″) + و ك − [illegible]

= −هـ (ك ك′ ك″ + ك + ك″) + [illegible]

وهذان الناتجان يدخلان تحت القاعدة المتقدمة (نمرة ١٢٩) ويشاهد أيضا ان مكرري هـ في مقداري المجهولين س ، س هما احد الآثلة التي قبل الأخيرة الناتجة من الكسر المتسلسل المتكون من الكسر الاعتيادي $\frac{ي}{ك}$ [illegible] وهاك مثالا للتوضيح والتمرين هو ان نريد حل المعادلة

٢٤ س + ٦٥ ص = ٤٦٣ .

فانها تحل بالنسبة لمجهول متبوع بأصغر مكرر كالمجهول س مثلا ثم يستخرج العدد الصحيح الذي يوجد فيه مقدار المجهول الآخر ص

$$س = \frac{٤٦٣ - ٦٥ ص}{٢٤} = ١٩ - ٢ ص + \frac{٧ - ٥ ص}{٢٤}$$

ولكي يكون أي مقدار صحيح مفروض للمجهول ص مُعيّنا مقدار صحيح للمجهول س يكفي

فيكون $\frac{٣-٢ص}{٥}$ عددًا صحيحًا فاذا رمز لهذا العدد غير المعين بالرمز و كان

$\frac{٣-٢ص}{٥} = و$ ..... (٢) و $ص = ١٠ - ٢ص + و$ ..... (٣)

وحينئذ فقد آل البحث عن الحلول الصحيحة للمعادلة (١) الى البحث عن الحلول الصحيحة للمعادلة (٢) التي فيها مكرر المجهولين ابسط منهما في الاولى ومن المشاهد انه لا يمكن استنتاج نحو من مشابه للمتقدم الا اذا حلت المعادلة بالنسبة للمجهول المتبوع بأصغر مكرر فحينئذ اذا اجرى هذا العمل على المعادلة (٢) تحصل

$ص = \frac{٣-٢٤و}{١٧} = -و + \frac{٣-٧و}{١٧}$

وحينئذ يلزم أن يكون $\frac{٣-٧و}{١٧}$ عددا صحيحًا فاذا رمز له بالرمز وَ تحصل

$\frac{٣-٧و}{١٧} = وَ$ ..... (٤) و $ص = -و + وَ$ ..... (٥)

واذًا فقد آل البحث عن الحلول الصحيحة للمعادلة (٢) الى البحث عن الحلول الصحيحة للمعادلة (٤)

وبتوالي العمل على هذا المنوال يتحصل

$و = \frac{٣-١٧وَ}{٧} = -٢وَ + \frac{٣-٣وَ}{٧}$ و

$\frac{٣-٣وَ}{٧} = وَ''$ ..... (٦) و $و = -٢وَ + وَ''$ ..... (٧)

ثم يتحصل

$وَ = \frac{٣-٧وَ''}{٣} = -١ - ٢وَ'' - \frac{وَ''}{٣}$ و

$\frac{وَ''}{٣} = وَ'''$ ..... (٨) و $وَ = -١ - ٢وَ'' - وَ'''$ ..... (٩)

ثم يحدث من معادلة (٩)

ق'' = ٢ ق'' . . . . . .

وحيث كان مكور ق'' في معادلة (١٠) مساوياً لواحد يمكن أن يفرض لغير المعين ق'' أي مقدار صحيح موجب أو سالب يحدث لغير المعين ق' مقدار صحيح أيضاً ثم تحصل مقادير و , ق , س , ص الصحيحة بواسطة معادلات (٩)، (٧)، (٥)، (٣) وعليه فقد حلت المعادلة المفروضة

وعوضاً عن أن يبحث بالتوالي عن مقادير غير المعينات ق'' , ق , و بالنسبة لمقدار ق'' ليتوصل بذلك الى مقادير س , ص يعين مقدار هذين المجهولين بدلالة غير المعين الأخير ق'' بأن يوضع ٢ ق'' بدل ق'' في معادلة (٩) فيتحصل

ق = ١ - ٧ ق'' فاذا وضع بدل ق , ق'' مقداراهما في المعادلة (٧) آلت الى

و = - ٢ + ١٧ ق''

واذا وضع بدل و , ق مقداراهما في المعادلة (٥) حدث

ص = ٢ - ٤٦ ق'' ومن هذا يتحصل

س = ٤ + ٦٥ ق''

ومن هذين القانونين تستخرج مقادير س , ص بأن يوضع فيهما بدل غير المعين ق'' أي مقدار صحيح موجب أو سالب

والطريقة التي سلكناها هنا يؤخذ منها أنه يكون للمعادلة المفروضة حلول صحيحة

[illegible] تعويضا او بين معادلتين يتوصل بها الى اجراء عمل على مكررى المجهولين [illegible]

[illegible] قسم مشتركة الأعظم

[illegible] مكررات غير المعينات فى معادلات المتوالية الناتجة من العمل فهى البواقى المتوالية

الحادثة من هذه العملية وحيث كان أحد هذه البواقى مساويا بالضرورة للواحد

يكون البحث عن الحلول المطلوبة ارتباطا بالبحث عن الحلول الصحيحة للمعادلة الأخيرة

التى يكون فيها مكرر غير المعين الذى يقبل الأخير مساويا للواحد بمعنى أنه يكفى لتحصيل

مقدار صحيح لغير المعين المذكور أن يفرض لغير المعين الاخير مقدار صحيح

[illegible] ما تقدم من الحسابات قابل للاختصار

واذا تعرض المعادلة ٤٤ س + ٦٥ ص = ٤٤٣

ثم يستخرج منها س = $\frac{٤٤٣ - ٦٥ ص}{٤٤}$

ثم يؤخذ بدل العدد ٤ الذى هو الجزء الصحيح من خارج قسمة ٦٥ على ٤٤

فى باقيها ١٧ الخارج الصحيح ٣ ويكون الباقى - ٧ وبناء عليه يكون

س = ١٠ - ٣ ص + $\frac{٣ + ٧ ص}{٤٤}$

واذا فرض أن $\frac{٣ + ٧ ص}{٤٤}$ = و نحصل

ص = $\frac{٤٤ و - ٣}{٧}$ = ٣ و + $\frac{٣ و - ٣}{٧}$

ولكى يكون مقدار ص صحيحا يلزم أن يكون المقدار $\frac{٣ و - ٣}{٧}$ صحيحا وحيث أنه

يمكن وضع المقدار $\frac{٣ و - ٣}{٧}$ بالصورة $\frac{٣ (و - ١)}{٧}$ وأن العددين ٣ ، ٧ أوليان

معا

[illegible]

[illegible]

[illegible]

فاذا حسب كل من مقداري [illegible] من [illegible] الاشارات

س = [illegible] ، ص = [illegible] ، ع = [illegible] [illegible]

ص = [illegible] ، س = [illegible] [illegible] من المقدارين

في المثال الاول حيث انه يمكن تجزيء [illegible] مقدار مختلفة

موجبة وسالبة

ويمكن ايضا اختصار الحسابات المتقدمة [illegible] المعادلة [illegible]

المقدار [illegible]

ثم يوجد انه اذا [illegible] قسمة [illegible] من [illegible] في

[illegible] ويكون [illegible] [illegible]

او [illegible] وحيث كان [illegible] [illegible]

س − ٢ قابلا للقسمة على [illegible] بحسب طرق

س − ٢ = ٤ و

ومن هذه المعادلة الاخيرة يحدث س = ٦ و وعليه فيكون

س = ١١ − ٣ ص + ٧ و = ٢ − ١٥ و

٥ينبه ومتى كان للكمية المعلومة هـ فى المعادلة حـ س + ء ص = هـ مع أحد مكررى المجهولين مضروب مشترك مكن مراعاته وسهلة تحويل هذه المعادلة الى اخرى ابسط منها لانه اذا فرض أن حـ = حَ م ، هـ = هَ م (بجعل حَ ، ءَ دالين على عدد صحيح) آلت المعادلة المفروضة الى اخرى هى

$$\text{حَ س} + \frac{\text{ء ص}}{\text{م}} = \text{هَ}$$

ولكى تكون حلول هذه المعادلة صحيحة يلزم أن يكون ء ص قابلاً للقسمة على م وحيث أن ء اولى مع م فيكون ص قابلاً للقسمة على م فاذا رمز لهذا الخارج بالرمز ع تحصل ص = م ع وبناء عليه يكون

$$\text{حَ س} + \text{ء ع} = \text{هَ}$$

ويمكن استعمال هذا الاختصار فى المعادلة ٢٤ س + ٦٥ ص = ٢٤٣ المتقدمة حيث أن كلا من مكرر المجهول س الذى هو ٢٤ والكمية المعلومة ٢٤٣ يقبل القسمة على ٣ وبناء على ذلك اذا فرض أن ص = ٣ ع آلت المعادلة المتقدمة الى

٨ س + ٦٥ ع = ٨١ ومنها يحدث

$$\text{س} = \frac{٨١ - ٦٥\text{ع}}{٨} = ١٠ - ٨\text{ع} + \frac{١ - ٥\text{ع}}{٨}$$

وينتج من $\frac{١ - ٥\text{ع}}{٨}$ = و أن ع = ١ - ٨ و فاذا ابدل ع بمقداره فى المعادلة المذكورة وفى معادلة ص = ٣ ع تحصل

س = ٢ + ٦٥ و ، ص = ٣ - ٢٤ و

بند ١٢٦ القانونان الناتجان من حل المعادلة ٢٤ س + ٦٥ ص = ٢٤٣ المذكورات (في بندى ١٣٠ و ١٣١) اللذان يختلفان في الصورة عن القانونين المستخرجين من المعادلة المذكورة المتقدمين (في بندى ١٣١ ، ١٣٢) يكونان متكافئين لانه اذا اخذ القانونان

س = ٤٦١٧ - ٦٥ و و ص = - ١٧٠١ + ٢٤ و

المتقدمان (في بند ١٣١) وقسم العدد ٤٦١٧ على ٦٥ والعدد ١٧٠١ على ٢٤ تحصل

٤٦١٧ = ٧١ × ٦٥ + ٢ ، ١٧٠١ = ٧١ × ٢٤ - ٣ وعليه فيكون

س = ٢ + ٦٥ (٧١ - و) ، ص = ٣ - ٢٤ (٧١ - و)

واذا فرض أن ٧١ - و = وَ تحصل

س = ٢ + ٦٥ وَ ، ص = ٣ - ٢٤ وَ

بند ١٢٧ ومن المعلوم أننا لم نتكلم الى هنا الا على طريقة تعيين الحلول الصحيحة موجبة كانت أو سالبة ولنتصدى الآن لاختبار الحالة التي يراد بها تعيين الحلول الصحيحة الموجبة فقط فنقول

أنه يمكن في المعادلة العمومية ء س + ء ص = ه أن تحد ه يكون موجبًا لانه ان كان سالبًا أمكن تحويله الى موجب بتغيير علامات طرفي المعادلة بند ٩٢ وحينئذ لا تخرج جميع الحالات المبينة بعلامات تحد و دعن المعادلات الاربع التي

[illegible] = هـ

[illegible] هـ

= [illegible] هـ

[illegible] = هـ

يحصل [illegible] هـ كمية من كميات موجبة

وأما المعادلة الثالثة فلا تختلف في الحل عن الثانية وأما الرابعة فليس لها

حل موجب وحينئذ يكون [illegible] من المعادلتين الأوليين

وقد شوهد [illegible] حلاً للمعادلة حس + ءص = هـ

تحصل نهايتي الحلول الصحيحة بواسطة القانونين

س = جَ + د ر ، ص = دَ − هـ ر

ولكي يكون ر من مقدار س ، ص موجبًا يلزم أن يكون

جَ + د ر > ٠ ، دَ − هـ ر > ٠ ومنهما يحدث

ر > −جَ/د ، ر < دَ/هـ

ولا ينبغي أن يفرض لغير المعين ر الا المقادير الصحيحة الموجبة أو السالبة

المحصورة بين النهايتين −جَ/د ، دَ/هـ وحينئذ يكون عدد الحلول

الصحيحة منتهيًا وذلك يشاهد بسهولة من المعادلة المفروضة لانه ان لم

يحصل عدد صحيح محصور بين النهايتين −جَ/د ، دَ/هـ كانت المعادلة غير

محققة

محققة بمقادير صحيحة موجبة وليلاحظ أن المتباينتين $ر > -\frac{جـ}{د}$ و $ر < \frac{جـ}{د}$ لا تكونان متخالفين لانه لما كان $ءر + ودر = هـ$ وكانت كمية هـ موجبة بالفرض كان $ءر + ودر > ٠$. ومن هنا يحدث

$$ودر > -ءر \text{ أو } \frac{جـ}{د} > -\frac{جـ}{د}$$

فاذا جعل جـ رمزاً لعدد صحيح موجب أو سالب أصغر من $-\frac{جـ}{د}$ و ء رمزاً لعدد صحيح أكبر من $\frac{جـ}{د}$ كانت مقادير ر المحصورة بين $-\frac{جـ}{د}$, $\frac{جـ}{د}$ مبينة بالاعداد

$$جـ + ١ \text{ , } جـ + ٢ \text{ , } جـ + ٣ \text{ , } \ldots\ldots ء$$

وحيث أن الفرق بين الكسرين $\frac{ء}{د}$, $-\frac{جـ}{د}$ هو $\frac{ودر + ءر}{ود}$ أى $\frac{هـ}{ود}$ فيكون الفرق ء − جـ مساوياً ك أو ك + ١ بجعل ك رمزاً للجزء الصحيح من خارج قسمة هـ على ود وحينئذ يكون عدد الحلول الصحيحة للمعادلة المفروضة مساوياً ك أو ك + ١

فاذا فرضت الآن المعادلة دس − ودص = هـ سوجد أنها لا تختلف عن المعادلة الأولى الا بتغيير علامة المجهول ص وباعتبار هذا التغيير فى المقدارين المتقدمين يتحصل $س = ءر + ودو$, $ص = -جـر + جـو$

ولكي يكون مقدارا س، ص موجبين يلزم أن يكون و > −ح/ء ، و > ح/ء .

وحينئذ يوجد لغير المعين ومقادير عددها الانهائي تكون محققة للمتباينتين

المقدمتين لانه يكفي لتحقق كلتا المتباينتين أن يكون و أكبر من أعظم الكميتين

−ح/ء ، ح/ء وبناء على ذلك تحصل حلول صحيحة موجبة غير متناهية العدد

في الحلول الصحيحة لعدة معادلات ذات درجة اولى محتوية على مجاهيل عددها يزيد عن عدد المعادلات المذكورة

٣٨ إذا فرضت المعادلتان العموميتان

ح س + ء ص + هـ ع = م ..... (١)

ح' س + ء' ص + هـ' ع = م' ..... (٢)

وحذف من بينهما أحد المجاهيل وليكن ع مثلاً فانه يحصل

(ح هـ' − هـ ح') س + (ء هـ' − هـ ء') ص = م هـ' − هـ م' ..... (٣)

وحينئذ فقد أبدلت معادلتا (١) و (٢) بمعادلتي (١) و (٣) فان كان للمعادلة

(٣) حلول صحيحة استنتج منها مقدارا س، ص بدالة غير معين وليكن و

وعليه فتؤول المسئلة الى تعيين المقادير الصحيحة لغير المعين وبحيث اذا وضع

مقدارا س، ص في المعادلة (١) تحصل مقدار صحيح للمجهول ع لانه اذا وضع

في المعادلة

في المعادلة (١) مقدار س، ص بدالة غير المعين و نوص في معادلة بالصورة

ج و + هـ ع = ك فإن كان لهذه المعادلة حلول صحيحة كانت مبينة بقانون

محتويين على ع , و بدالة غير المعين ن و واذا أبدل المعين بدالة ن

بمقداره في مقداري س، ص المستخرجين من معادلة (٣) تصير

الجاهيل الثلاثة بدالة غير المعين الصحيح ن

فاذا كان مكررا هـ، هـَ أوليين معًا فانه يكفي أن يكون للمعادلة (٣) حلول

صحيحة حتى يكون للمعادلتين (١)، (٢) حلول صحيحة أيضا وحينئذ فكل مقدار

من مقادير س، ص صحيحين ومحققين للمعادلة (٣) يحصل بواسطة ن في

المعادلة (١) مقدار صحيح للمجهول ع لانه اذا فرض أن س = ج، ص = ك

هو الحل الصحيح للمعادلة (٣) تحصلت المتساوية

(ج هـَ - جـَ هـ) ع + (ك هـَ - كـَ هـ) ك = م هـَ - مـَ هـ ومنها يجد

هـَ (م - ج ع - ك ك) = هـ (مـَ - جـَ ع - كـَ ك)

وحيث فرض أن هـ، هـَ أوليان معا فيكون هـ قاسما لكمية م - ج ع - ك ك

ونجعل ر رمزا لخارج القسمة يتحصل

ج ع + ك ك + هـ ر = م

بحيث تكون المعادلة (١) متحققة بالمقادير

س = ع ، ص = ك ، ع = ر

وينتج من ذلك أنه متى كان مكررا هـ ، هـ اولين معًا استخرج من معادلة

(٢) مقدارا س ، ص بدالة غير المعين و ثم يوضع هذان المقداران في

معادلة (١) فتؤول المعادلة يستخرج منها مقدار المجهول ع بدالة غير

المعين و

ولمزيد التوضيح والتمرين على ذلك نفرض المعادلات الثلاث الرقمية وهي

٢٩ ينبغي

١٢س + ٥ص - ٤ع + ٤ط = ٥٥٩

٨س + ٧ص + ٣ع - ٥ط = ١٥٩٥ و

١١س - ٣ص + ٥ع - ٧ط = ٤١٥٧ و

ثم يحذف المجهول ط من بين المعادلة الاولى وكلتا المعادلتين الاخريين

فتحصل المعادلتان

٩٧س + ٥٢ص + ٤ع = ١٩١٢٥ و

١٢٥س + ٤٢ص + ٦ع = ٢٦٥٤١

ويحذف المجهول ع من بين هاتين المعادلتين يحصل

٣٩ س + ٢٤ ص = ٧٧٤٦

وحينئذ فقد آلت جملة المعادلات المفروضة الى المعادلات الثلاث

١٣ س + ٥ ص − ٤ ع + ٤ ط = ٢٥٥٩ ، ع

٩٧ س + ٥٣ ص + ٤ ع = ١٩١٧٥ ، ن

٣٩ س + ٢٤ ص = ٧٧٤٦

ثم يبحث عن القانونين اللذين تعلم بواسطتهما الحلول الصحيحة للمعادلة ذات المجهولين ٣٩ س + ٢٤ ص = ٧٧٤٦ وحيث أن مكرر س يقل القسمة على المضروب ٣ الذي يقسم العدد ٧٧٤٦ وأن مكرر ص يقل القسمة على المضروب ٢ الذي يقسم العدد ٧٧٤٦ فيمكن اختصار الحساب بفرض س = ٢ سَ ، ص = ٣ صَ وحينئذ تؤول المعادلة المفروضة الى

١٣ سَ + ١٧ صَ = ١٢٩١

واذا حلت هذه المعادلة بمقتضى ما تقدم فانه يتوصل الى

صَ = ١ + ١٣ و ، سَ = ٩٨ − ١٧ و وعليه يكون

ص = ٣ + ٣٩ و ، س = ١٩٦ − ٣٤ و

واذا وضع في المعادلة ٩٧س + ٥٣ص + ٢ع = ١٩١٧٥ بدل

بهويين س، ص مقداراهما المعينان بدالة غير المعين و تحصل

١٢٣١و - ٢ع = -٤

ومن هذه المعادلة يستنتج مقدارا ع، و بدالة غير معين آخر وَ

وحينئذ تحصل و = ٢وَ ع = ١٢٣١وَ + ٢

ثم يوضع بدل و مقداره ٢وَ في مقداري س، ص السابقين فيؤولان الى

ص = ٣ + ٧٨وَ ، س = ١٩٦ - ٦٨وَ

ثم توضع بدل س، ص، ع المعينة بدالة غير المعين وَ مقاديرها في المعادلة

١٣س + ٥ص - ٢ع + ٤ط = ٢٥٥٩ فتحصل

٧٢٩و - ط = ومنها يحدث

ط = ٧٣٩وَ

وحيث كان مقدار ط المعين بدالة وَ صحيحًا فيكون الحساب منتهيًا

وبالجملة فتتعين الحلول الصحيحة لجملة المعادلات المفروضة بواسطة القوانين

س = ١٩٦ - ٦٨وَ ، ص = ٣ + ٧٨وَ

ع = ٢ + ١٢٣١وَ ، ط = ٧٣٩وَ

فاذا كان لا يطلب غير الحلول الصحيحة [illegible]

وان [illegible] $\frac{١٩٦}{٦٠}$ أعني $\frac{١٥}{١٧}$ وحينئذ يوجد [illegible]

اذا فرض أنه $\left\{\begin{array}{l} و = ٠ \\ و = ١ \\ و = ٢ \end{array}\right.$ تحصل $\left\{\begin{array}{l} س = ١٩٦ ، ص = ٣ ، ع = ٨ ، ط = ٠ \\ س = ١٦٨ ، ص = ٨١ ، ع = ٣٢ ، ط = ٢٣٥ \\ س = ٦٠ ، ص = ١٥٩ ، ع = ٦٦ ، ط = ١٧٤٠ \end{array}\right.$

بند ١٤٠ ولنتصدى الآن لذكر الحالة التي يراد فيها تعيين الحلول الصحيحة لمعادلة مشتملة على مجاهيل عددها يزيد عن اثنين فنقول

اذا فرضت المعادلة $ح س + ء ص + هـ ع = ج$ فشوهد أنه اذا كان لمكررات ح ، ء ، هـ مضروب مشترك لا يقسم الكمية المعلومة ج كانت المعادلة غير متحققة بمقادير س ، ص ، ع الصحيحة وعليه ولا يلزم بعد الاختصار أن يكون للمكررات ح ، ء ، هـ مضروب مشترك

واذا كان مكررا ح ، ء اوليين معا أمكن أن يعرض للمجهول ع مقدار به يحدث لكل من المجهولين س ، ص عدة غير متناهية من مقادير [illegible]

ولتحصيل القانونين اللذين بواسطتهما نعلم من اول وهلة مقدار [illegible] المطابقة لكل مقدار يعرض للمجهول ع فوضع المعادلة [illegible]

ح س + د ص = ج − هـ ع

ثم يفرض لمزيد الاختصار أن ج − هـ ع = م فيحصل

ح س + د ص = م

ثم يستخرج من هذه المعادلة مقداراً س و ص بالنسبة لكل من م وغير المعين و فاذا ابدل م بالمقدار ج − هـ ع تحصل مقداراً س و ص بالنسبة لكل من ع وغير المعين و

وتختصر هذه الكيفية متى وجد بين المكررات الثلاثة ح و د و هـ اثنان غير أولين معاً مثلاً اذا فرض أن ح = حَ ك و د = دَ ك آلت المعادلة المفروضة الى

حَ س + دَ ص = (ج − هـ ع) / ك

ولكي يكون مقداراً س و ص صحيحين يلزم أن يكون ج − هـ ع قابلاً للقسمة على ك فاذا رمز لخارج القسمة بالرمز و تحصل

(ج − هـ ع) / ك = و ومنها يحدث

هـ ع + ك و = ج

وعليه فتؤول المعادلة المتقدمة الى

حَ س

[illegible]

وحيث [illegible]

ه , و , ه غير اولية معا فيتوصل بمعادلة ه ح + ك و = ى الى مقدار

ح , و بدلالة غير المعين الصحيح و ثم يوضع بدل و مقداره فى مقدارى

س , ص المتقدمين فيتحصل مقداراهما بدلالة غير المعين و . اه

مثلا اذا فرض أنه اريد حل المعادلة

١٥ س + ٦٠ ص + ٢٠ ع = ١٧١ توضع هكذا

٥ س + ١٠ ص = $\frac{١٧١ - ٢٠ ع}{٣}$

ويفرض $\frac{١٧١ - ٢٠ ع}{٣}$ = و يتحصل

٥ س + ١٠ ص = و ومنها يستخرج

س = و − ٢ ل , ص = ٣ ل − ٢ و ويتوصل بالمعادلة

$\frac{١٧١ - ٢٠ ع}{١}$ = و

و = ٥٧ − ٢٠ ق , ع = ٢ ق

فاذا ابدل و بالمقدار ٥٧ − ٢٠ ق فى مقداري س , ص المتقدمين يتحصل

س = ٥٧ − ٢٠ و − ٢ل ، ص = ٥ل + ٤٠ و − ١١٤

ومن هذه القوانين التي بواسطتها تتعين الحلول الصحيحة للمعادلة المفروضة هي

س = ٥٧ − ٢٠ و − ٢ل ، ص = ٥ل + ٤٠ و − ١١٤ ، ح = ٣ و

التي يفرض فيها لكل من غير المعينين و ، ل جميع ما يراد من الاعداد الصحيحة

ولكي يكون مقدار ع الصحيح موجبًا يلزم أن تفرض لغير المعين و مقادير

موجبة ويلزم ايضًا لجعل مقداري س ، ص موجبين أن يكون

ل < (٥٧ − ٢٠ و)/٢ ، ل > (١١٤ − ٤٠ و)/٥

ويؤخذ من هاتين المتباينتين أن

(٥٧ − ٢٠ و)/٢ > (١١٤ − ٤٠ و)/٥ ومنها يحدث

و < ٥٧/٢٠ أي < ١٧/٦

وحينئذ لا يمكن أن يفرض لغير المعين و الا المقادير ٠ ، ١ ، ٢ فاذا كان

و = ٠ فيكون ل < ٥٧/٢ ، ل > ١١٤/٥ ولذا يمكن أن يفرض أن س = ٢٣

أو ٢٤ أو ٢٥ أو ٢٦ أو ٢٧ أو ٢٨

واذا كان و = ١ وجب أن يكون ل < ٣٧/٢ ، ل > ٧٤/٥ وحينئذ يكون

ل = ١٥ أو ١٦ أو ١٧ أو ١٨

واذا كان

[illegible]

[illegible]

[illegible]

المسئلة الثانية

اذا كان المراد قسمة ٧٠ غرشًا الى قطع من النقود منها ما قيمته خمسة غروش ومنها ما قيمته عشرون غرشًا

يجاب عن ذلك فيقال اذا رمز للقطع التي قيمة احداها خمسة غروش بالرمز س وللتي قيمة احداها عشرون غرشًا بالرمز ص نتج من ذلك لهذه المسئلة ثلاثة حلول هي

(١) { س = ١٠ ، ص = ١ } (٢) { س = ٦ ، ص = ٢ } (٣) { س = ٢ ، ص = ٣ }

المسئلة الثالثة

اذا كان المراد تقسيم ٧١ غرشًا الى قطع من النقود منها ما قيمته خمسة غروش ومنها ما قيمته عشرون غرشًا يقال أنه لا يوجد لهذه المسئلة حل صحيح

المسئلة الرابعة

اذا كان المراد قسمة ٧٦ غرشًا الى قطع من النقود منها ما قيمته خمسة غروش ومنها ما قيمته غرشان

يقال في الجواب انه اذا رمز لعدد القطع الاولى بالرمز ص وللثانية بالرمز س نتج من ذلك حلان هما

(١) { س = ٤ ، ص = ٨ } (٢) { س = ٣ ، ص = ٤ }

المسئلة الخامسة

عدة من الرجال والنساء صرفوا خمسين فرنكاً في دسكرة لخص كل رجل ٥٥ سنتيماً وكل امرأة ٦٥ سنتيماً والمراد معرفة عدد الرجال والنساء لذلك يقال إذا جعل س رمزاً لعدد الرجال وص رمزاً لعدد النساء كان لهذه المسئلة حلول اربعة هي

(١) { س = ٢ ، ص = ٢٤ } (٢) { س = ١٥ ، ص = ٥٥ } (٣) { س = ٢٨ ، ص = ٣٦ } (٤) { س = ٤١ ، ص = ١٧ }

المسئلة السادسة

اذا كان المراد معرفة العدد الذي باقي قسمته على ٣٩ يساوي ١٦ وباقي قسمته على ٥٦ يساوي ٢٧

يقال في الجواب عن ذلك انه يتوصل الى حل هذه المسئلة بالقانون العمومي

ع = ١١٤٧ + ١٨٤٢ و

الذي تعلم منه جميع الأعداد المحققة لمنطوق المسئلة وحينئذ يكون أصغر

الأعداد المطلوبة هي ١١٤٧

المسئلة السابعة

رجل اشترى مائة ماشية من خيل وبغال وحمير بمبلغ مائة من الاكياس وكان ثمن الفرس الواحد يساوي ثلاثة اكياس ونصف كيس وثمن البغل الواحد يساوي كيساً وثلث كيس وثمن الحمار الواحد يساوي نصف كيس والمراد معرفة عدد كل من هذه الأجناس

فلحل هذه المسئلة يقال اذا رمز بالرمز س لعدد الخيول وبالرمز ص لعدد البغال وبالرمز ع لعدد الحمير كان لهذه المسئلة ثلاثة حلول هي

(١) { س = ٥ ، ص = ٤٤ ، ع = ٥١ }
(٢) { س = ١٠ ، ص = ٢٤ ، ع = ٦٦ }
(٣) { س = ١٥ ، ص = ٦ ، ع = ٧٩ }

المسئلة الثامنة

ما هي الاعداد الثلاثة المرموز لها بالرموز س و ص و ع التي اذا ضرب الاول منها في ٣ والثاني في ٥ والثالث في ٧ كان مجموعها مساوياً ٥٦٠ واذا ضرب الأول في ٩ والثاني في ٥٠ والثالث في ٦٩ كانت مجموع الحواصل الجزئية مساوياً ٩٢٠

لذلك يقال أن هذه المسئلة يكون لها بعد اجراء العملية حلان هما

(١) { س = ١٥ ، ص = ٨٤ ، ع = ١٥ } (٢) { س = ٥٠ ، ص = ٤٠ ، ع = ٣٠ }

بند ١٤٧ وحيث كان الحل غير المعين للمعادلات التي تزيد درجتها عن الدرجة الأولى لا يندرج تحت ما ذكر فلم نقصده هنا الا للحالة التي تكون فيها المعادلة ذات الدرجة الثانية والمجهولين غير محتوية على الدرجة الثانية لأحد المجهولين ويمكن اعتبار البحث عن حلول هذه المعادلة كالبحث عن الحل غير المعين لمعادلة ذات درجة اولى بأن يقال

كل معادلة ذات درجة ثانية ومجهولين غير محتوية على القوة الثانية لأحدهما توضع هكذا

م س ص + ن س + ع س + ك ص = ر ..... (١)

فاذا حلت هذه المعادلة بالنسبة للمجهول ص تحصل

ص = (− ن س − ع س + ر) / (م س + ك) ..... (٢)

واذا أجريت عملية القسمة الكائنة في هذا المقدار فانه يحدث

ص = − (ن / م) س + (ن ك − م ع) / م² + (م² ر + م ع ك − ن ك²) / (م² (م س + ك))

ومن هنا يحدث

$$\text{م}_{\text{ص}} = -\text{م}_{\text{ج}}\,\text{س} + \text{ج}\,\text{ك} - \text{م}_{\text{ج}} + \frac{\text{ل}}{\text{م}_{\text{س}} + \text{ك}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٣)$$

وذلك بجعل ل كناية عن $\text{م}_{\text{ر}} + \text{م}_{\text{ج}}\,\text{ك} - \text{ج}\,\text{ك}$

ولكي يكون كلا مقداري س، ص عددًا صحيحًا يلزم أن يكون $\frac{\text{ل}}{\text{م}_{\text{س}} + \text{ك}}$ عددًا صحيحًا ثم نحسب قواسم العدد ل ويجعل كل منها مساويًا للكمية $\text{م}_{\text{س}} + \text{ك}$ ومسبوقًا بعلامة + و − فان نحصل من المعادلات الناتجة من ذلك مقادير صحيحة للمجهول س وضعت هذه المقادير في المعادلة (٣) لاستخراج مقادير ص ولكي تكون هذه المقادير صحيحة يلزم أن يكون الطرف الثاني من المعادلة (٣) الذي يؤول الى كمية معلومة قابلًا للقسمة على $\text{م}_{\text{ص}}$

ومن المعلوم أن عدد الحلول الصحيحة يكون دائمًا منتهيًا وقد لا يتيسر الحصول على واحد منها فاذا سلكنا هذه الطريقة في حل كل من المعادلات الثلاث

$$٢\,\text{س}\,\text{ص} - ٣\,\text{س} + \text{ص} = ١ \quad \text{و}$$

$$٥\,\text{س}\,\text{ص} = ٢\,\text{س} + ٣\,\text{ص} + ١٨ \quad \text{و}$$

$$\text{س}\,\text{ص} + \text{س} = ٢\,\text{س} + ٣\,\text{ص} + ٢٩$$

ولم نعثر

[illegible]

بجميع المجهول س وفرض أن س = ح' + ك و (بجعل و رمز لعدد صحيح)

فانه يحدث

$$ص = \frac{ح'^{٢} + ح ح' - ر}{ك} - (٢ ح' و + ك و^{٢} + ح و)$$

وحيث فرض أن ح'^٢ + ح ح' - ر قابل للقسمة على ك فيكون مقدار ص المطابق س = ح' + ك و عدداً صحيحاً وهذه النتيجة لا يطرأ عليها تغير على أي وجه كانت علامة و ويؤخذ من ذلك أنه متى وجد للمعادلة المفروضة حلول صحيحة وكان مقدار س محصوراً فيما بين الصفر و ك فلإيجاد جميع الحلول الصحيحة للمعادلة المفروضة توضع فيها بدل س الاعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ..... ك - ١ وحينئذ فكل حل صحيح مطابق لأحد هذه الاعداد يتحصل منه حلول أخرى غير متناهية

الباب الخامس

في نظريات الاعداد الاولية

والكسور غير القابلة للاختصار

وخواص قسمة الاعداد على بعض

قواسمها ونظريات على الجذور

[illegible]

[illegible]

إذا كان العدد ى قاسماً لحاصل ضرب د × ح [illegible] المضروبين د ، ى وكان أولياً مع المضروب ح كان قاسماً للمضروب الآخر د

والبرهنة على ذلك بفرض أن ح > ى ثم بفرض أنه يجزئ على العددين ح ، ى علامتاه لعملية القاسم المشترك الأعظم بينهما فإذا رمزنا لخوارج القسمة المتوالية الناتجة من هذا العمل بالرموز ك ، كَ ، كً ... وللبواقي المتوالية بالرموز ء ، ءَ ، ءً ... تحصل

ح = ى ك + ء

ى = ء كَ + ءَ

⋮ ⋮

وبضرب كل من طرفي هذه المتساويات في العدد د وقسمتها على العدد ى يحصل

$\frac{ح د}{ى} = د ك + \frac{ء د}{ى}$ ، $د = \frac{ءَ د}{ى} \times كَ + \frac{ءَ د}{ى}$ .....

وحيث أن الطرف الأول $\frac{ح د}{ى}$ من المتساوية الأولى عدد صحيح فيكون

$\frac{ء}{ج}$ حيث أيضًا [illegible] $\frac{ء}{ج}$ من المتساوية الثانية عددًا صحيحًا

كانت الكمية $\frac{ء}{ج}$ عددًا صحيحًا كذلك وهلم جرا وحيث أن ح ، ج

عددان اوليان معًا فيكون أحد البواقي ء ، ء ، ء ..... مساويًا

للواحد وعليه فيكون $\frac{ء \times ١}{ج} = \frac{ء}{ج}$ عددًا صحيحًا

ومثل هذا يبرهن على الحالة التي يكون فيها ح < ء

نتائج

(الاولى) كل عدد أولي كالعدد ج يكون قاسمًا للحاصل ح ء هـ و

يقسم أحد مضاربيه لانه اذا كان العدد ج لا يقسم العدد ح كان

اوليًا معه وحينئذ يلزم انه يقسم ء هـ و وكذلك اذا كان العدد ج

لا يقسم العدد ء كان اوليًا معه وحينئذ يلزم انه يقسم هـ و واذا كان

لا يقسم العدد هـ فانه يلزم ان يكون قاسمًا للعدد و

(الثانية) كل عدد أولي يكون قاسمًا للعدد ح^م يقسم العدد ح حيث أن

ح^م = ح × ح × ح × ح × ح × .....

(الثالثة) متى كان العدد ح قابلاً للقسمة على كل من الاعداد ء ، ءَ ، ءَ ...

الاولية معًا كان قابلاً للقسمة على حاصل ضربها وهو ء ءَ ءَ .....

[illegible]

لانه لما كان العدد م قابلاً للقسمة على ء كان م = ء ك بفرض ك
رمزاً لعدد صحيح ولما كان العدد ء قاسماً للعدد م كان قاسماً للحاصل :
ء ك وحيث أن ء اولى مع ء فيكون ء قاسماً للعدد ك وحينئذ يكون
ك = ء كَ بفرض كَ رمزاً لعدد صحيح وعليه فيكون م = ء ء كَ
ومن هنا يعلم أن العدد م يقبل القسمة على ء ء وعلى هذا المنوال يبرهن
على أن العدد م يكون قابلاً للقسمة على الحاصل ء ء ء .....

النظرية الثانية

ص ١٤٢ لا يمكن تحليل أي عدد الى مضاريب اولية الا بصورة واحدة

مثلاً اذا فرض العدد ع = ح ء هـ و ..... (بجعل ح ، ء ، هـ ، و ... رموزاً لمضاريب اولية متساوية أو غير متساوية) فلا يتأتى تحليله بغير هذه الكيفية لانه اذا فرض أن ع = حَ ءَ هـَ وَ ..... (بجعل حَ ، ءَ ، هـَ ، وَ ... رموزاً لمضاريب اولية اخرى) كان ح ء هـ و ..... = حَ ءَ هـَ وَ ... وحينئذ يكون الحاصل ح ء هـ و ..... قابلاً للقسمة على حَ لأنه يكون قابلاً للقسمة على أحد مضاريبه وحيث كانت المضاريب الاولية معاً فيكون أحدها مساوياً حَ فانه [illegible] مصرح

من المتساوية المذكورة ينتج من [illegible] أن ح

يكون مساويًا لأحد مضاريب الحاصل ح ر ..... [illegible] لتكون مضاريب

الحاصلين متساوية بالتناظر .

نتائج

الاولى اذا كان ع = ح^م ر^ع ه^ك وفرض أن ح ، ر ، ه دالة على مضاريب

اولية معًا والأسس م ، ع ، ك دالة على أعداد صحيحة موجبة فمن

البديهي أن جميع المضاريب التي يمكن تكوينها من أسس المضاريب الاولية

ح ، ر ، ه تكون قاسمة للعدد ع وتكون قوى المضروب الأول مبتدئة من

الصفر الى م والثاني من الصفر الى ع والثالث من الصفر الى ك وحينئذ

لا يكون للعدد ع قواسم غير هذه الحواصل اذ لولا ذلك لأمكن تحليل هذا العدد

الى جمل منوعة من المضاريب الأولية ويؤخذ من ذلك أنه يمكن بالسهولة

تحصيل قواسم العدد ع بحساب تجميع حدود الحاصل

(١ + ح + ح^٢ + ... + ح^م) (١ + ر + ر^٢ + ... + ر^ع) (١ + ه + ه^٢ + ... + ه^ك)

التي تكون مختلفة عن بعضها لكونه لا يوجد منها اثنان يكونان مركبين من

مضاريب واحدة أولية متحدة في الاس وبناء على ذلك تكون عدة قواسم العدد

ع

ى مساوية (١ + ١) (١ + ١) (١ + ١) وذلك بأن يعتبر الواحد و العدد

ى من جملة هذه القواسم

الثانية يؤخذ مما تقدم أن ١ + ح + ح² + ... + ح^ى يكون مساويًا لخارج

قسمة ح^(ى+١) − ١ على ح − ١ وعليه فيكون حاصل جمع قواسم العدد ى

مبينًا بالمقدار

$$\frac{ح^{ى+١}-١}{ح-١} \times \frac{ح^{ى+١}-١}{ح-١} \times \frac{ح^{ك+١}-١}{ح-١}$$

الثالثة ينتج مما تقدم في النتيجة الاولى أن القواسم المشتركة بين جملة أعداد

لا يمكن أن تكون تحتوية على غير المضاريب الاولية المشتركة بين هذه

الاعداد وحينئذ يكون القاسم الاعظم المشترك بين جملة عدد مساويًا لحاصل

ضرب جميع المضاريب الاولية المشتركة بين

هذه الاعداد

[illegible]

مختلفة [illegible]

في حدث [illegible]

النظرية الثالثة

يلزم الكسر لا يكون قابلاً للاختصار متى كان حداه اوليين معاً

مثلاً اذا كان $\frac{ح}{ى}$ كناية عن كسر حداه ح، ى اوليان معاً يقال ان هذا الكسر لا يقبل الاختصار لانه لو امكن اختصاره لكان مساوياً لكسر آخر كالكسر $\frac{ح'}{ى'}$ حداه دون حديه فاذا فرض أن $\frac{ح}{ى} = \frac{ح'}{ى'}$ كان $\frac{ح}{ى} = ح'$ وحينئذ يكون ى قاسماً للحاصل ح'ى وحيث كان ح أولياً مع ى فيكون ى' قابلاً للقسمة على ى وهذا محال لانه قد فرض أن ى' أقل من ى

النظرية الرابعة

يلزم تساوي كسر بآخر غير قابل للاختصار أن يكون حدا الكسر الاول مساويين لحدي الكسر الثاني مضروبين في عدد صحيح واحد

لانه اذا فرض أن $\frac{ح}{ى}$ كسر غير قابل للاختصار وكان $\frac{ح}{ى} = \frac{ح'}{ى'}$ نتج من ذلك أن $ح = \frac{ح'ى}{ى'}$ وبمقتضى هذه المساوية يكون الحد ى' الاولي مع ح' قاسماً للحد ى فاذا فرض أن $ى = م ى'$ (بجعل م رمزاً لعدد صحيح)

فاذاً

[illegible]

[illegible]

[illegible]

فتقبل القسمة على ك مساويًا بالأقل لعدد المضاريب الداخلة في الخاص و

لانه اذا فرض أن ك < ح وجعل حَ رمزًا للجزء الصحيح من خارج قسمة ح

على ك كانت مكررات ك المحصورة في الأعداد المبتدئة من الواحد في

ح مساوية ك ، ٢ك ، ٣ك ..... حَك

واذا فرض أيضًا أن ك < ع وجعل عَ رمزًا للجزء الصحيح من خارج قسمة

ع على ك كانت مكررات ك المحصورة في المتسلسلة المبتدئة من الواحد

الى ع مساوية ك ، ٢ك ، ٣ك ..... عَك

وبالجملة اذا جعل مَ رمزًا للخارج الصحيح من قسمة م على ك كانت

مكررات ك المحصورة بين الأعداد المبتدئة من الواحد الى م مساوية

ك ، ٢ك ، ٣ك ..... مَك وحيث فرض أن ع + ح = م فيكون

$\frac{م}{ك} = \frac{ع}{ك} + \frac{ح}{ك}$ وحينئذ يكون

مَ = عَ + حَ أو مَ > عَ + حَ

وحينئذ فقد ثبت المطلوب

فاذا جعل الآن حَ دالًا على مضروب اولي ح ، ل على عدد مضاريب

ح القابلة للقسمة على حَ ، ل' على عدد المضاريب المشتملة على

حَ

حَ بدرجة ثانية أو بدرجة أعلى منها ن ن على عدد لمضاريب متنوعة
على حَ بدرجة ثالثة أو بدرجة أعلى منها وهكذا وفرض ن ن ن ن ن ن
فان الحاصل ى يكون قابلاً للقسمة على حَ ص ولا يكون قابلاً للقسمة على قوة
أعلى من حَ ص لكن حيث كان ح يحتوى بالأقل على مضاريب قابلة للقسمة
على حَ المأخوذ بكل قوة يوجد منها فى الحاصل ى فيكون ح قابلاً للقسمة
على حَ ص ومشتملاً على جميع المضاريب الأولية للحاصل ى مرفوعة ب
قوى مساوية بالاقل للقوى التى ارتفعت اليها هذه المضاريب فى الحاصل ى
وحينئذ يكون ح قابلاً للقسمة على ى

وبمثل هذا يبرهن على أن الحاصل ١ × ٢ × ٣ × ... × م يكون قابلاً للقسمة
على ١ × ٢ × ٣ × ... × ج × ١ × ٢ × ٣ × ... × ج × ١ × ٢ × ٣ × ... × ك
بفرض أن م = ج + ج + ك + ...

فى خواص قسمة الاعداد على بعض قواسمها

١٤٦ خواص قسمة الأعداد على بعض قواسمها ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٩ ، ١١ الخ الموضحة
فى كتب الحساب تنحصر فى قضية عمومية يمكن تطبيقها على جميع الجمل التعدادية
مثلاً اذا فرضنا أن ى كناية عن عدد صحيح مكتوب بالنسبة لجملة تعدادية

أساسها ل ثم توهمنا قسمة هذا العدد بالتتابع من اليمين الى الشمال العقود كل منها مشتمل على ارقام عددها م ماعدا العقد الأخير فانه قد يكون كاملاً وقد لا يكون كاملاً ثم رمزنا لهذه العقود بالرموز ح، د، هـ، و وفرضنا أنها منفصلة عن بعضها فحصل

$$ع = ح + د ل^{م} + هـ ل^{٢م} + و ل^{٣م}$$

ويمكن وضع هذا المقدار بهذه الصور الثلاث وهي

$$ع = ل^{م}(هـ ل^{م} + و ل^{٢م} + \dots) + ح + د$$

$$ع = [د(ل^{م}-١) + هـ(ل^{٢م}-١) + و(ل^{٣م}-١)] + (ح + د + هـ + و)$$

$$ع = [د(ل^{م}+١) + هـ(ل^{٢م}-١) + و(ل^{٣م}+١) \dots] + (ح + هـ + \dots) - (د + و + \dots)$$

وحينئذٍ تكون الاجزاء الأول من مقادير ع المبينة بهذه الصور الثلاث قابلة للقسمة بالتناظر على $ل^{م}$ ، $ل^{م}-١$ ، $ل^{م}+١$ ومن هنا تؤخذ القواعد الآتية وهي

أنه يلزم اولاً في كل جملة تعدادية ان يكون باقي قسمة عدد على أي قاسم مكون من الاساس المرفوع الى القوة اليمنى عين الباقي المتحصل من قسمة العقد الأول (المتألف من أرقام عددها م مأخوذة عن يمين العدد)

علم الحساب

وثانياً انه يلزم حتى تعادية ايكون [illegible] عدد على أي قاسم مكون من الأساس المرفوع الى القوة الجبية زائدة واحداً عين الباقي المحصل من قسمة حاصل جميع العقود الثرية [illegible] منها من ارقام عددها م) على هذا القاسم

وثالثاً انه يلزم [illegible] أن يكون الباقي قسمة عدد على أي قاسم مكون من الأساس المرفوع الى القوة الجبية زائدة واحداً عين الباقي المحصل من قسمة فاضل حاصل جميع العقود الثرية [illegible] منها من أرقام عددها م) وحاصل جميع العقود الزوجية على القاسم المذكور

وبناء على ذلك يلزم لكي تكون القسمة الأولى صحيحة ان تكون القسمة الثانية منتهية

ومتى اريد معرفة قابلية عدد كالعدد ع للقسمة على عدد آخر كالعدد ج بواسطة القواعد المتقدمة ينبغي ان يبدأ بالبحث عن قوة الأساس التي بقسمتها على ج يكون الباقي مساوياً للصفر أو +١ أو -١ فاذا كان العدد ج لا يحتوي الا على مضاريب أولية للاساس لـ فانه

يتحصل لهذا الأساس قوة تكون قابلة للقسمة على ح وحينئذ يجب أن تطبق القاعدة الاولى على ذلك

واذا كان العدد ح اوليًا مع الأساس ل فانه يبرهن على أنه يوجد لهذا الأساس قوة اذا نقصت عن أصلها واحدًا كان الباقي قابلاً للقسمة على ح لانه اذا قسمت القوى المتوالية ل, ل^{2}, ل^{3}..... ل$^{ح-1}$ للأساس ل على العدد ح تحصل من ذلك بواقي عددها ح يكون كل واحد منها دون هذا العدد ولا يكون معدومًا لان ح أولى مع الأساس ل ويؤخذ من هذا انه لو تحصل من ذلك باقيان متساويان لتحصلت المتساويتان ل^{ك} = ح ك + ر ، ل$^{ك+م}$ = ح ك' + ر (بفرض أن م + ح يكون دالاً على عدد دون ح) اللتان يستنتج منهما أن ل^{ك} (ل^{م} - ١) = ح (ك' - ك) وعليه فيكون ح قاسمًا للحاصل ل^{ك} (ل^{م} - ١) وحيث أن ح اولى مع كل من ل, ل^{ك} فيكون قاسمًا ل^{م} - ١

واذا فرض أن ح عدد اولى وأن ل^{م} كناية عن أصغر قوة للأساس ل بحيث اذا نقصت عن اصلها واحدًا كان الباقي قابلاً للقسمة على ح فان كان العدد م زوجيًا ومبينًا بالرمز ٢ كان ح قاسمًا ل$^{م/٢}$ + ١

لأنه لما كان $ل^{ج} - ١ = (ل^{ن} - ١)(ل^{ن} + ١)$ لزم أن يكون ج قاسمًا للعدد $ل^{ن} - ١$ أو $ل^{ن} + ١$ وحينئذٍ لا يكون قاسمًا $ل^{ن} - ١$ وانما يكون قاسمًا $ل^{ن} + ١$

فاذا فرضنا مثلاً أن ج = ٣٧ وقسمت القوى المتوالية للعدد ١٠ على ٣٧ كانت القوة الثالثة للعدد ١٠ المذكورة التي يتحصل منها باقٍ مساوٍ +١ وينتج من ذلك ان قابلية أي عدد للقسمة على ٣٧ تتوقف على قابلية قسمة حاصل جمع العقود (التي كل منها مركب من ثلاثة ارقام) على ٣٧

واذا فرضنا ايضًا أن ج = ٧ كانت أصغر قوى العدد ١٠ التي تقسم على ٧ ليكون الباقي مساويًا +١ هي ١٠٠٠٠٠٠ وعليه فكل عدد يقبل القسمة على العدد ٧ يكون له ارتباط بقابلية حاصل جمع العقود (التي كل منها مؤلف من ستة ارقام) على العدد ٧ وحيث أن باقي قسمة العدد ١٠٠٠ على ٧ يساوي -١ فينتج من ذلك أن أي عدد يكون قابلاً للقسمة على ٧ متى كان الفاضل بين حاصل جمع العقود الفردية المرتبة (التي كل منها مؤلف من ثلاثة ارقام) وحاصل جمع العقود الزوجية المرتبة (التي كل منها مؤلف من ثلاثة ارقام) قابلاً للقسمة على ٧

في بعض نظريات [illegible]

١٤٨ [illegible] والبرهنة على ذلك [illegible]
لو فرض [illegible] يفرض أنه [illegible] الاختصار كان [illegible] وحينئذ يلزم أن يكون
[illegible] قابلاً للقسمة على [illegible] لما كان [illegible] هو أولاً [illegible] معاً كان
[illegible] كذلك لأنه إذا فرض أن [illegible] مضروب مشترك أولاً [illegible]
من [illegible] كان هذا المضروب الأولي [illegible] حيث
لا يكون الكسر [illegible] مساوياً لعدد صحيح وبذلك يكون الفرض المتقدم
فاسداً

النظرية الثانية

١٤٩ بند لكي يكون الجذر الميمي لكسر غير قابل للاختصار منطقاً يلزم أن يكون حداه
مركبين من قوة صحيحة درجتها م فاذا رمز لهذا الكسر بالرمز [illegible] وكان
جذره الميمي مبيناً بالكسر [illegible] الذي يفرض غير قابل للاختصار كان
[illegible] = [illegible] وحيث أن الكسر [illegible] غير قابل للاختصار فيكون الكسر
[illegible]

$\frac{ح}{و}$ كذلك وتكون متساوية المتقدمة غير محققة مالم يكن ح = و

ح د = و ز كما في [illegible]

فائدتان

الاولى القوى المتوالية لعدد اكبر من الواحد كالعدد ح لا تزال آخذة في الازدياد الى غير نهاية

ولذا يفرض بحيث أن ح > ١ فيؤخذ من ذلك مباشرة أن ح^٢ > ح ، ح^٣ > ح^٢ ..... ح^ن > ح^{ن-١}

فاذا فرض أن ح - ١ = د كان ح^٢ - ح > د وبناء على ذلك يكون ح^٣ - ح^٢ > د ، ح^٤ - ح^٣ > د ..... ح^ن - ح^{ن-١} > د وبضم هذه الارتباطات الى بعضها ينتج بطرف يحصل ح^ن - ١ > ن د أو ح^ن > ١ + ن د وحينئذ يمكن جعل ن كبيرا بحيث تكون نكية ١ + ن د اكبر من كل كمية معروضة [illegible] ح [illegible] وفيه [illegible] مقدار [illegible] بحيث [illegible] مقدار ح^ن اكبر من [illegible]

الثانية [illegible] لا تزال

آخذة في التناقص إلى أن تقرب من الصفر.

ولذا يقال حيث أن $ح^{١} < ١$ فيؤخذ من ذلك مباشرة أن $ح^{٢} < ح^{١}$ ، $ح^{٣} < ح^{٢}$ ..... $ح^{م+١} < ح^{م}$ فاذا فرض أن $ح = \frac{١}{٢}$ كان $ح$ أكبر من الواحد وحينئذ يكون $ح^{١} = \frac{١}{٢}$ ومنها يحدث $ح^{٢} = \frac{١}{٤}$ وعلى ذلك اذا جعل $ع$ رمزاً لكمية معلومة صغيرة ما امكن فلا يتحقق الارتباط $ح^{م} < ع$ الا اذا كان $\frac{١}{٢^{م}} < ع$ أو $٢^{م} > \frac{١}{ع}$ وحينئذ يمكن من بمقتضى النظرية المتقدمة تحصيل مقدار للأس $م$ يكون محققاً لهذا الشرط الأخير

النظرية السابعة

يوجد الجذر الميمي لأي عدد يقرب من الواحد كلما ازدادت درجة الجذر $م$

وبمكن أخذ $م$ كبيراً بحيث يكون هذا الجذر مختلفاً عن الواحد بكمية معلومة صغيرة ما

يعتبر عدد اكبر من الواحد كالعدد $ح$ ثم يفرض أن $ح'$ كناية عن الجذر الميمي للعدد $ح$ ، $ح''$ كناية عن الجذر الذي درجته $م + د$ للعدد المذكور فيكون العددان $ح'$ ، $ح''$ اكبر من الواحد ويكون $ح'^{م+د} = ح'' = ح'^{م} \times ح'^{د}$ وحينئذ يكون $ح'^{م} > ح''$ وبناء على ذلك يكون $ح' > ح''$

فاذا فرض أن هـ كناية عن كمية معلومة صغيرة بقدر ما يراد وفرض للأس م مقدار بحيث يحصل (١ + هـ)^م > ٢ (كما في ١٥٠) كان الجذر اليمنى لعدد ح أقل من ١ + هـ

واذا اعتبر الآن عدد دون [illegible] وفرض أن ح كناية عن جذر [illegible] كناية عن جذر الذي درجته [illegible] العدد المذكور [illegible] ح أصغر من الواحد وحيث أن [illegible] فيكون [illegible] وحينئذ [illegible]

وبالفرض [illegible] هـ كناية عن كمية صغيرة بقدر ما يراد وفرض للأس م مقدار بحيث يحصل (١ + هـ)^م < ٢ (كما في ١٥١) كان الجذر الذي درجته [illegible] لعدد ح أكبر من ١ + هـ

الباب الرابع

في قوى الحدود وجذورها والأس الكسري والمعادلات الأسية واللوغاريتم في قوى الحدود وجذورها

[illegible] في الفصل الثاني من الباب الثاني من مبادئ الجبر [illegible] أن قوة أي كمية

هي حاصل الضرب مركب من جملة مضاريب كل منها مساو لهذه الكمية

وعليه فالقوة الميمية لكمية تساوي حاصل ضرب مركب من مضاريب

عددها م كل منها مساو لهذه الكمية ويلزم بمقتضى قاعدة ضرب

الجذور لتكوين القوة الميمية لحد أن يرفع مكرره الى القوة الميمية وتضرب

أسس كل من حروفه في م

وينتج مما تقدم أنه يلزم لايجاد الجذر الميمي لحد ان يؤخذ الجذر الميمي لمكرره

وتقسم اسس كل من حروفه على م مثلاً الجذر الثالث للحد ٦٤ ح^٦ ز^٣

هو ٤ ح^٢ ز والجذر الخامس للحد ٣٢ ح^١٥ ز^١٠ هو ٢ ح^٣ ز^٢ وحينئذ

يلزم لاستخراج الجذر الميمي لحد أن يكون مكرره الرقمي قوة صحيحة درجتها م

وأن تكون اسس كل من حروفه قابلة للقسمة على م فان كان أحد هذين

الشرطين غير محقق كان الجذر الميمي للحد غير منطق ويستدل عليه بوضعه تحت

علامة √ ويطلق على العدد م المكتوب بين شعبتي هذه العلامة

اسم دليل الجذر ويقتضي قاعدة ضرب الكسور يلزم لايجاد القوة

الميمية لكسر ان يرفع كل من حديه الى القوة م وعليه فيستخرج الجذر

الميمي لكسر بأخذ الجذر الميمي لكل من حديه

[illegible]

[illegible] على أن الجذر الثالث للعدد [illegible] له مقادير [illegible]

الجذر الثالث للعدد [illegible] هو [illegible] مقادير لأنه [illegible]

الجذر المطلوب بالرمز [illegible] والعدد المعلوم بالرمز [illegible] تخصص

[illegible] = ٠ وقد تقدم أن [illegible] يقبل [illegible]

فإذا اعتبرت قيمة القسمة تخصصات معادلة [illegible]

التي لا تحقق إلا بفرض أحد المضروبين [illegible]

يساوي صفراً ومن هنا تستخرج [illegible] مقادير الجذر [illegible]

يبرهن على أن الجذر الرابع له أربعة مقادير وجذر [illegible]

وهكذا وعليه فيكون للجذر [illegible] للعدد [illegible] مقادير [illegible]

في جمع الجذور [illegible] وطرحها وضربها وقسمتها

١٥١ [illegible] ما تقدم (في [illegible]) [illegible] بحسب [illegible] الجذور [illegible]

المنطقة ذات الدرجة [illegible] والثالث [illegible] على حدة

غير المنطقة التي من أي درجة وحيث أنه قد سبق أيضاً تعريف جذور

المتشابهة وغير المتشابهة فلا نذكر هنا الا العمليات التي يقتضي أن تجري عليها فنقول

في جمع الجذور المتشابهة وطرحها

اذا اريد ايجاد حاصل جمع $٥\sqrt{٢}$ و $٣\sqrt{٢}$ سوهذا يساوي $٨\sqrt{٢}$

واذا اريد ايجاد باقي طرح $٥\sqrt{٢}$ من $٣\sqrt{٢}$ [illegible] $٢\sqrt{٢}$

واذا اريد ايجاد ناتج $٣\sqrt{٢}$ [illegible] وهذا يساوي [illegible]

في ضرب الجذور المختلفة في [illegible]

بند ١٥٩ يلزم لتكوين حاصل ضرب جملة جذور مختلفة في الدرجة أن تضرب الكميات الموضوعة تحت كل علامة جذر في [illegible] واحدة بين شعبتيها دليل الجذر [illegible]

يساوي $\sqrt{٢}$ لانه اذا [illegible] القوة [illegible]

$\sqrt{٢}$ [illegible] $(\sqrt{٢})^{٢}$ [illegible]

ضرب $\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}$ [illegible]

في قسمة [illegible]

بحيث انه يبرهن بمثل ما تقدم في ضرب الجذور على قسمتها فيكون

$$\sqrt[ن]{\frac{هـ}{ى}} = \frac{\sqrt[ن]{هـ}}{\sqrt[ن]{ى}}.$$

وينتج مما تقدم في الضرب والقسمة أنه يمكن ادخال مضروب تحت علامة الجذر بضرب اسه في دليل الجذر واخراجه من تحتها بقسمة اسه على دليل الجذر مثلاً

$$\sqrt[ن]{هـ^{م}ى} = هـ \sqrt[ن]{ى} ،$$

$$\sqrt[ن]{هـ^{م}ى^{ن}} = هـ \sqrt[ن]{ى} ،$$

$$\sqrt[ن]{\frac{هـ^{م}}{ى}} = هـ \sqrt[ن]{\frac{هـ}{ى}} ،$$

$$\sqrt[ن]{\frac{هـ^{م}}{ى^{ن}}} = هـ \sqrt[ن]{\frac{هـ}{ى}}$$

وبمثل ذلك يحصل

$$\sqrt[ن]{هـ^{م}ى^{ن}} = \sqrt[ن]{هـ^{م}} \times \sqrt[ن]{ى^{ن}} = هـ \sqrt[ن]{ى^{ن}} ،$$

$$\sqrt[ن]{\frac{هـ^{م}}{ى^{ن}}} = \frac{\sqrt[ن]{هـ^{م}}}{\sqrt[ن]{ى^{ن}}} = \frac{\sqrt[ن]{هـ^{م}}}{ى}$$

وهذا هو المعروف بقاعدة اخراج المضروب من تحت علامة الجذر

[illegible] بعضها

[illegible] عملية لاحتساب وينظر هل هي

[illegible] شاهدنا أنها تؤول بعد

[illegible] ولا شك أن هذه الجذور متشابهة

[illegible] ضرب بين جذرين عدد صحيح

[illegible] العدد أن لها مثلاً

[illegible] تعريف الجذران (أ ، ب) = ر

[illegible]

[illegible] الجذور المختلفة

[illegible] الاخرى ثم نرفع

[illegible]

[illegible]

مثلاً نحو بين جذور [illegible] وجذور متحدة

في البسط تحت أصغر مكرر يقسم لأعداد [illegible]

[illegible] يضرب بين كل جذر وخارج قسمة عدد [illegible] على عدد

مذكور، رفع كل موضوع تحت علامة الى قوة تكون

خارج المذكور درجة [illegible] جذور متحدة [illegible]

[illegible]

وينتج من ذلك [illegible] = [illegible] [illegible] كل منها كان بين جذور

كل موضوعة تحت علامة مسروب مترك مكن حذفه

[illegible] بزوال [illegible] جذور مختلفة في البسط وخارج قسمتها

على بعضها [illegible] جذور متحدة في البسط [illegible]

[illegible] ما تقدم في [illegible] من ضرب جذور متحدة في البسط وخارج [illegible]

[illegible]

$$\sqrt[3]{\text{ح}_{\text{د}}} \times \sqrt[6]{\text{ح}_{\text{د}}^{2}} \times \sqrt[12]{\text{ح}_{\text{د}}^{8}} = \sqrt[6]{\text{ح}_{\text{د}}} \times \sqrt[12]{\text{ح}_{\text{د}}^{9}} \times \sqrt[12]{\text{ح}_{\text{د}}^{8}} = \sqrt[12]{\text{ح}_{\text{د}}^{10}} = \sqrt[12]{\text{ح}_{\text{د}}^{12}} = \sqrt[6]{\text{ح}_{\text{د}}^{2}}$$

$$= \text{ح}_{\text{د}} \sqrt[6]{\text{ح}_{\text{د}}}$$

وبمثل هذا يتحصل

$$\sqrt[25]{\frac{\text{ح}}{\text{د}}} = \sqrt[35]{\frac{\text{ح}^{21}_{\text{د}}}{\text{ح}^{14}_{\text{د}}}} = \sqrt[35]{\frac{\text{ح}^{21}_{\text{د}}}{\text{ح}^{20}_{\text{د}}}} = \sqrt[5]{\frac{\text{ح}^{3}_{\text{د}}}{\text{ح}^{4}_{\text{د}}}}$$

بند ١٦٠ يلزم لرفع جذر غير منطق الى أى قوة أن نرفع الكمية التى تحت علامته الى درجة هذه القوة مثلاً اذا اريد رفع $\sqrt[\text{أ}]{\text{ح}}$ الى القوة التى درجتها م شوهد أنه يتحصل $\left(\sqrt[\text{أ}]{\text{ح}}\right)^{\text{م}} = \sqrt[\text{أ}]{\text{ح}^{\text{م}}}$ لان

$$\left(\sqrt[\text{أ}]{\text{ح}}\right)^{\text{م}} = \sqrt[\text{أ}]{\text{ح}} \times \sqrt[\text{أ}]{\text{ح}} \times \sqrt[\text{أ}]{\text{ح}} \times \dots = \sqrt[\text{أ}]{\text{ح} \times \text{ح} \times \text{ح} \times \dots} = \sqrt[\text{أ}]{\text{ح}^{\text{م}}}$$

ومتى كان دليل الجذر قابلاً للقسمة على درجة القوة التى يراد رفع ما تحت العلامة اليها اجرى العمل بهذه المثابة وهى أن يقسم العدد الأول على الثانى فيحدث

$$\left(\sqrt[\text{م}]{\text{ح}}\right)^{\text{م}} = \sqrt[\frac{\text{م}}{\text{م}}]{\text{ح}^{\text{م}}} = \sqrt[\text{أ}]{\text{ح}}$$

بند ١٦١ الجذر الميمى لكمية غير منطقة يتحصل بضرب دليلها فى درجة الجذر الميمى

التى

التي يرد الوعود بها أن استوت بعد المبي للكبة موضوعة تحت علامة

[illegible]

[illegible]

وعليه فيكون

[illegible]

في [illegible]

[illegible] قد تقدم أنه يلزم لاستخراج بعد الوف للكبة [illegible] يقسم الأس

على م فانكانت القسمة ممكنة وجعل ق رمزاً لخارج القسمة كان الجذر النونى للكمية $\text{ح}^{\text{م}}$ بيناً هكذا $\text{ح}^{\text{ق}}$ وانكانت القسمة غير ممكنة أمكن تكون الجذر غير المنطق $\sqrt[\text{ن}]{\text{ح}^{\text{م}}}$ بيناً هكذا $\text{ح}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$

١٦٢ القواعد التى يلزم تطبيقها على الأسس الكسرية تؤخذ من القواعد المقررة فى شأن الجذور غير المنطقة مثلاً اذا اعتبرت الآن احوال الضرب والقسمة وتكوين القوى واستخراج الجذور نشوهد أن

$$\text{ح}^{\frac{\text{م}}{\text{ك}}} \times \text{ح}^{\frac{\text{ق}}{\text{ك}}} = \sqrt[\text{ك}]{\text{ح}^{\text{م}}} \times \sqrt[\text{ك}]{\text{ح}^{\text{ق}}} = \sqrt[\text{ك}]{\text{ح}^{\text{م}} \times \text{ح}^{\text{ق}}} = \sqrt[\text{ك}]{\text{ح}^{\text{م}+\text{ق}}}$$

$$= \frac{\text{م}+\text{ق}}{\text{ك}} = \frac{\text{م}}{\text{ك}} + \frac{\text{ق}}{\text{ك}} \text{ ،}$$

$$\text{ح}^{\frac{\text{م}}{\text{ك}}} : \text{ح}^{\frac{\text{ق}}{\text{ك}}} = \sqrt[\text{ك}]{\text{ح}^{\text{م}}} : \sqrt[\text{ك}]{\text{ح}^{\text{ق}}} = \sqrt[\text{ك}]{\text{ح}^{\text{م}} : \text{ح}^{\text{ق}}} = \sqrt[\text{ك}]{\text{ح}^{\text{م}-\text{ق}}}$$

$$= \frac{\text{م}-\text{ق}}{\text{ك}} = \frac{\text{م}}{\text{ك}} - \frac{\text{ق}}{\text{ك}} \text{ ،}$$

$$\left(\text{ح}^{\frac{\text{م}}{\text{ك}}}\right)^{\text{ق}} = \left(\sqrt[\text{ك}]{\text{ح}^{\text{م}}}\right)^{\text{ق}} = \sqrt[\text{ك}]{\text{ح}^{\text{م}\text{ق}}} = \text{ح}^{\frac{\text{م}\text{ق}}{\text{ك}}} \text{ ،}$$

$$\sqrt[\text{ق}]{\text{ح}^{\frac{\text{م}}{\text{ك}}}} = \sqrt[\text{ق}]{\sqrt[\text{ك}]{\text{ح}^{\text{م}}}} = \sqrt[\text{ق}\text{ك}]{\text{ح}^{\text{م}}} = \text{ح}^{\frac{\text{م}}{\text{ق}\text{ك}}} \text{ ،}$$

$$\left(\text{ح}^{\frac{\text{م}}{\text{ك}}}\right)^{\frac{\text{ق}}{\text{ك}}} = \sqrt[\text{ك}]{\left(\sqrt[\text{ك}]{\text{ح}^{\text{م}}}\right)^{\text{ق}}} = \sqrt[\text{ك}]{\sqrt[\text{ك}]{\text{ح}^{\text{م}\text{ق}}}} = \sqrt[\text{ك}]{\text{ح}^{\text{م}\text{ق}}} = \text{ح}^{\frac{\text{م}\text{ق}}{\text{ك}}}$$

وحينئذٍ يؤخذ من هذه النتائج المختلفة ان القواعد المنسوبة للأسس الكسرية لا تختلف عن القواعد المتعلقة بالأسس الصحيحة

بند ١٦٣ قد تقدم في الأسس السالبة انه متى كان الأس ح سالبًا أمكن أخذ المقدار $\frac{1}{\text{ح}^{\text{ح}}}$ بدل $\text{ح}^{\text{ح}}$ وذلك لا يختلف في الأسس الكسرية بمعنى أن $\text{ح}^{-\frac{\text{م}}{\text{ن}}} = \frac{1}{\text{ح}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}}$ لان

$$\text{ح}^{-\frac{\text{م}}{\text{ن}}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{ح}^{-\text{م}}} = \sqrt[\text{ن}]{\frac{1}{\text{ح}^{\text{م}}}} = \frac{1}{\sqrt[\text{ن}]{\text{ح}^{\text{م}}}} = \frac{1}{\text{ح}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}}$$

في المعادلات الأسية

بند ١٦٤ خواص الأسس توصل الى نظرية ضرورية لحل جملة مسائل وكثيرة الاستعمال في الحسابات العددية

وحينئذٍ يلزم أن يبرهن على أن جميع الاعداد تنتج من قوة عدد ثابت موجب أكبر من الواحد بأن رمز بالرمز ح عدد ثابت موجب أكبر من الواحد وكونت القوى المتوالية ح، ح²، ح³، ... حدث من ذلك جملة اعداد لا تتناهى آخذة في الازدياد في غير نهاية

فاذ فرض كسر حيثما اتفق كالكسر $\frac{ح}{م}$ الذي يكون حداه م، م دالين على عددين صحيحين موجبين كان المقدار $\frac{ح}{م}$ اكبر من الواحد لانه يكافئ $\sqrt[م]{ح}$ وحيث أن العدد ح اكبر من الواحد فيكون $ح^{م}$ اكبر من الواحد وعليه فيكون المقدار $\sqrt[م]{ح}$ دالا على عدد اكبر من الواحد ويكون ايضا المقدار $\frac{ح}{م}$ اخذا في الكبر كما كبر الأس لانه اذا رمز بالرمزين $ح^{ر}$، $ح^{ر'}$ لأسين موجبين حيثما اتفق حدث $ح^{ر+ر'} = ح^{ر} \times ح^{ر'}$ وحيث أن $ح^{ر}$ أكبر من الواحد فيكون حاصل الضرب $ح^{ر} \times ح^{ر'}$ اكبر من $ح^{ر}$

واذا فرض الان ان $ر = \frac{ن}{م}$ (بفرض م عددا صحيحا) كان $ح^{ر+ر'} - ح^{ر} = ح^{ر}(ح^{ر'} - ١) = ح^{ر}(\sqrt[م]{ح} - ١)$ وحيث شوهد أنه يمكن أن يفرض للعدد م مقدار كاف بحيث يكون $\sqrt[م]{ح}$ مختلفا عن الواحد بقدر ما يراد (كما في بند ١٥١) فيمكن أن يفرض للعدد ح مقدار صغير بحيث يكون الفرق $ح^{ر+ر'} - ح^{ر}$ صغيرا بقدر ما يراد

ومن هنا يؤخذ انه اذا رمز بالرمزين س، ص لكميتين متغيرتين وفرضت المعادلة $ص = ح^{س}$ وفرض للمتغير س جملة مقادير متقاربة بعضها من بعض بالابتداء من الصفر الى + ∞ كان للمتغير ص جملة مقادير متقاربة بعضها من بعض بحيث اذا زاد س

بكمية

بكيفية متوالية بالابتداء من الصفر الى + ∞ اخذ ص جميع المقادير من الواحد الى + ∞

واذا فرض للمتغير س مقادير سالبة بأن كان س = - ن آلت المعادلة المتقدمة الى

$$ص = ح^{ن} = \frac{1}{ح^{ن}}$$

فاذا فرض أن ن يأخذ مقادير من ابتدا الصفر الى + ∞ فان $ح^{ن}$ يأخذ مقادير من ابتدا الواحد الى + ∞ وحينئذ يكون للمتغير $\frac{1}{ح^{ن}}$ مقادير من ابتدا الواحد الى $\frac{1}{∞}$ او الى الصفر

ولنفرض الآن أن ح يكون دالاً على عدد دون الواحد مبين بالكسر $\frac{1}{ى}$ (بفرض ى عدداً اكبر من الواحد) فتؤول المعادلة

$$ص = ح^{س} \text{ الى } ص = \left(\frac{1}{ى}\right)^{س} = \frac{1}{ى^{س}}$$

واذا اخذ س جميع المقادير من ابتدا الواحد الى + ∞ تأخذ $ى^{س}$ جميع الأعداد من الواحد الى + ∞ وعليه فتكون جميع مقادير ص محصورة بين الواحد والصفر واذا فرض للمتغير س مقادير من ابتدا نصف الى - ∞ أخذ $ى^{س}$ جميع المقادير المحصورة بين الواحد والصفر وعليه يكون للمتغير ص جميع الاعداد من ابتدا الواحد الى ∞

وينتج مما سبق انه اذا كونت جميع القوى لعدد موجب اكبر من الواحد أو أصغر منه
أمكن استنتاج جميع الاعداد

بند ١٦٥ اذا فرض في المعادلة س = حـ^ص أن س معلوم ورمز له بالرمز د كانت
حـ^ص = د

ولاستخراج مقدار ص من هذه المعادلة يفرض في ابتداء الأمر أن حـ > ١ ، د > ١
وحينئذ اذا وضعت بدل ص الاعداد الصحيحة ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ .....
وتوصل بذلك الى مقدارين كالعددين ن ، ن + ١ (وربما كان
ن صفرا) بحيث يكون حـ^ن < د < حـ^(ن+١) كان مقدار ص محصورا
بين ن ، ن + ١

واذا فرض أن ص = ن + ١/ص (بجعل ص اكبر من الواحد) آلت المعادلة
المفروضة الى حـ^ن × حـ^(١/ص) = د ومنها يحدث

حـ^(١/ص) = د/حـ^ن أو حـ = (د/حـ^ن)^ص

وحيث أن خارج قسمة د على حـ^ن محصور بين ١ ، حـ فيمكن تعيين
المقدار الصحيح المقرب من ص بأن يستعوض عن ص بالاعداد ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ .....
وبتوالي العمل على هذا المنوال يتحصل للمتغير ص مقدار معين كمثل
مثلا

[illegible]

[illegible] شهرين وحدة [illegible] = ن وحيث

تؤول المعادلة المتقدمة ن ^{ص} = ٢ ومن هذا يحدث ١٠ = ^{ص}

وحيث أن القوى المتوالية لعدد ٢ هي ٢، ٤، ٨، ١٦، ..... فيكون مقدار

ص محصوراً بين ٣، ٤ وعليه فيكون ص = ٣ + $\frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ فاذا وضع هذا

المقدار في المعادلة ١٠ = ^{ص} حدث

$$٢^{٣+\frac{\text{ب}}{\text{جـ}}} = ١٠ \quad \text{أي} \quad ٢^{٣} \times ٢^{\frac{\text{ب}}{\text{جـ}}} = ١٠ \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$٢^{\frac{\text{ب}}{\text{جـ}}} = \frac{١٠}{٨} = ١,٢٥ \quad \text{أو} \quad (١,٢٥)^{\text{جـ}} = ٢$$

واذا كونت القوى المتوالية لعدد ١,٢٥ كان العدد ٢ محصوراً بين

$(١,٢٥)^{٣}$ و $(١,٢٥)^{٤}$ وحينئذ يكون ن = ٣ + $\frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ واذا وضع بدل ن

مقداره في المعادلة الأخيرة حصل

$$(١,٢٥)^{٣+\frac{\text{ب}}{\text{جـ}}} = ٢ \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$(١,٢٥)^{٣} \times (١,٢٥)^{\frac{\text{ب}}{\text{جـ}}} = ٢ \quad \text{أو} \quad (١,٢٥)^{\text{ر}} = ١,٢٥$$

وعلى ذلك يعلم من المعادلة الأخيرة أن مقدار ر يكون محصوراً بين

٠,٩ وحينئذ يكون ر = ٩ + $\frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ وهو حـ

وبناء عليه يكون

$$س = \frac{٣ + \frac{١}{٣ + \frac{١}{٩ + ...}}}{}$$

فاذا حسبت الآثلة الرابعة لهذا الكسر المتسلسل تحصل $\frac{٢٨}{٩٣}$ وهو المقدار المقرب للمجهول س وهذا المقدار يزيد عن المقدار الحقيقي غير أن الخطأ يكون فيه اقل من $\frac{١}{٩٣ \times ١٠٣}$ أي من $\frac{١}{٩٥٧٩}$

واذا فرض الآن في المعادلة $ح^{س} = ء$ أن $ح > ١$ و $ء < ١$ كان مقدار س سالبًا فاذا جعل $س = -ص$ آلت المعادلة المتقدمة الى

$ح^{-ص} = ء$ أو $\frac{١}{ح^{ص}} = ء$ ومنها يحدث

$$ح^{ص} = \frac{١}{ء}$$

وحيث أن ء اقل من الواحد فيكون $\frac{١}{ء}$ اكبر من الواحد وعليه فقد آل الأمر الى الحالة السابقة

واذا فرض أن $ح < ١$ و $ء > ١$ كان مقدار س سالبًا أيضًا فاذا جعل $س = -ص$ كانت $ح^{-ص} = ء$ أي $\frac{١}{ح^{ص}} = ء$ ومنها يحدث

$$\left(\frac{١}{ح}\right)^{ص} = ء$$

وحيث ان

[illegible]

حيث كان $\text{ح}^{\text{م}}$ عدداً صحيحاً وثانياً عدا ايضاً انه ينبغي ان يكون ح , ى مركبين من مضاريب أولية واحدة لان كل مضروب أولى قاسم للعدد ح يقسم $\text{ح}^{\text{م}}$ وبسببه يكون قاسماً للعدد $\text{ى}^{\text{ن}}$ أو ى وبمثل هذا يبرهن على أن كل مضروب أولى للعدد ى يقسم العدد ح

واذا فرض أن $\text{ح} = \text{ح}^{\text{ط}}\,\text{ى}^{\text{ك}}$, $\text{ى} = \text{ح}^{\text{ى}}\,\text{ى}^{\text{ى}}$ (بجعل $\text{ح}^{\text{ى}}\,\text{ى}^{\text{ى}}$ كناية عن المضاريب الأولية للعددين ح , ى) آلت المتساوية $\text{ح}^{\text{م}} = \text{ى}^{\text{ن}}$ الى

$$\text{ح}^{\text{م}} \times \text{ى}^{\text{م ك}} = \text{ح}^{\text{ط}} \times \text{ى}^{\text{ى}}$$

ولكي تكون هذه المتساوية حقيقية يلزم ان يكون م ج = ط , م ك = ى

وحاشا أن المتساويتان يحدث منهما

$$\frac{\text{ى}}{\text{ك}} = \frac{\text{ط}}{\text{ج}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$$

وعليه فلكي يكون مقدار س منطقاً يلزم ان يكون ى عدداً صحيحاً وان تكون المضاريب الاولية للعدد ى عين المضاريب الاولية للعدد ح وان تكون اسس مضاريب العدد ى مناسبة لاسس مضاريب العدد ح

وتكون الشروط المتقدمة كافية لتحقيق ما ذكر لانه اذا فرض أن ح = $\text{ح}^{\text{ط}}$, ى = $\text{ح}^{\text{ى}} \times \text{ى}^{\text{ى}}$, $\frac{\text{ط}}{\text{ج}} = \frac{\text{ى}}{\text{ك}}$ تحصل

$\text{ح}^{\frac{\text{ط}}{\text{ج}}}$

$\frac{ط}{ح} = ح^{ط} \times ء^{\frac{ك ط}{ح}} = ح^{ط} \times ء^{ے} = ء$

فان كان ء أصغر من الواحد كان س سالبًا اذا فرض انه منطق وبين بالوضع

$-\frac{م}{ح}$ تحصل $ح^{\frac{م}{ح}} = ء$ ومنها يحدث $ء^{\frac{١}{م}} = ح$ وبمقتضى هذه المساواة

الاخيرة ينبغي ان يكون ء كسرا وباختصار حديه يكون بسطه الواحد

ومقامه عدد كالعدد $ح^{م}$ مثلًا اذا فرض أن $ح = ح^{ك} \times ء^{\frac{١}{ك}}$ كما تقدم

وجب ان يكون $ء = \frac{١}{ح^{ط} ء^{ے}}$ ، $\frac{ط}{ح} = \frac{ے}{ك}$

ومتى كان $ح = ١٠$ ، $ء > ١$ آلت الشروط المتقدمة الى $ء = ١٠^{ط} \times ء^{ے}$

$ط = ے$ ومن هنا يحدث $ء = ١٠^{ط}$

ومتى كان ء أصغر من الواحد لزم أن يكون $ء = \frac{١}{١٠^{ط} \times ء^{ے}}$ ، $ط = ے$ ومنها

يحدث $ء = \frac{١}{ح^{ط}}$ وينتج من ذلك ان مقدار س يكون منطقًا في الحالة

التي يكون فيها ح مساويًا للعدد الصحيح ١٠

في الخواص العمومية للوغاريتمات

بند ١٧٦ اذا اعتبرنا أن سائر الاعداد مكونة من القوى المتنوعة لعدد ثابت اطلق عليه

اسم هذه القوى اسم اللوغاريتمات [illegible]

س في المعادلة ص = ح^س [illegible]

(بفرض [illegible]) ويبدأ [illegible] = [illegible]

ويطلق على العدد الثابت الذي [illegible] به جملة لوغارتمات اسم أساس

هذه الجملة

بند ١٦٨ اذا فرض أن ص، ص′، ص″ ... خ رموز لاعداد و س، س′، س″ و

... خ رموز للوغارتمات هذه الأعداد بالنسبة لجملة أساسها ح حيث

ص = ح^س ، ص′ = ح^س′ ، ص″ = ح^س″ ، ص‴ = ح^س‴ ، ص = ح^س

$\sqrt[م]{ص} = ح^{\frac{س}{م}}$

ومن هنا يؤخذ بمقتضى قاعدة الأسس

ص ص′ ص″ ... خ = ح^(س + س′ + س″ + ...) ومنها يحدث

لو ص ص′ ص″ = س + س′ + س″ ، لو $\frac{ص}{ص′}$ = س − س′ ، لو ص^م = م س

و لو [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

اولاً أن لوغارتم حاصل ضرب يكون مساويًا لمجموع لوغارتمات مضاربه

وثانيًا أن لوغارتم خارج قسمة عددين يكون مساويًا للوغارتم المقسوم منه

منه لوغارتم المقسوم عليه

وثالثًا ان لوغارتم أي قوة لاي عدد يكون مساويًا للوغارتم هذا العدد

مضروبًا في درجة القوة المذكورة

ورابعًا أن لوغارتم جذر أي عدد يكون مساويًا للوغارتم هذا العدد

مقسومًا على درجة الجذر المذكور

ويؤخذ من القاعدة الثانية ان لوغارتم أي كسر يكون مساويًا للوغارتم

بسطه مطروحًا منه لوغارتم مقامه وينتج من القاعدتين الاوليين أن

لوغارتم الحد الرابع من متناسبة يكون مساويًا لمجموع لوغارتمي الوسطين

مطروحًا منه لوغاريتم الحد الأول

بند متى تكونت جملة لوغاريتمية سهل الانتقال منها الى جملة اخرى لانه اذا

رمز بالرمز ع لاساس الجملة الاولى وبالرمز ى لاساس الجملة الثانية

فالرمز س لوغارتم عدد كما هدد م بالنسبة للجملة التي اساسها ى

هد ست

[illegible] الدالة [illegible] للجملة التي أساسها د تحصر

[illegible]

[illegible]

ومن هذا [illegible] يلزم [illegible] لوغارتمات جميع الاعداد بالنسبة للأساس

[illegible] هذه الأعداد المنسوبة للجملة التي أساسها

[illegible] بشرط أن يكون لوغارتم ء مأخوذاً

بالنسبة للأساس ح

ويطلق على خارج قسمة $\frac{1}{\text{لوء}}$ اسم قياس الأساس ء بالنسبة للأساس ح

يؤخذ من تعريف اللوغارتمات وما تقدم (في بند ١٦٥)

أولاً أن الأساس في كل جملة لوغارتمية يكون مساوياً للواحد. ويكون

لوغارتم الواحد مساوياً للصفر

وثانياً اذا كان الأساس أكبر من الواحد كانت لوغارتمات الأعداد المتزيدة

عن الواحد موجبة ولوغارتمات الأعداد التي دون الواحد سالبة ولوغارتم

الصفر صفر

وثالثاً

وثالثاً اذا كان لأس من الوحدة كانت لوغارتمات
الأعداد التي تزيد عن وحدة موجبة ولوغارتمات الأعداد
التي دون الوحدة موجبة ولوغارتمات الصفر سالبة

١١٣ حيث أن اللوغارتمات لا تستعمل عادة الا لاختصار الأعمال
الرقمية فلا يعتبرها غير لوغارتمات الأعداد الموجبة
ويفرض دائماً ان الاساس يكون موجب وحينئذ لا يكون
للاعداد السالبة لوغارتمات

١٧٤ يمكن استعمال اللوغارتمات لايجاد حل معادلات مجهول واحد
مثلا اذا وضعت المعادلة

$$\text{حـ}^{\text{س}} = \text{ع}$$

فانه يستخرج من المقتضى ما تقدم (في ١٦٩) $\text{س} = \frac{\text{لو ع}}{\text{لو حـ}}$
واذا اريد حل المعادلة $\text{حـ}^{\text{س}} = \text{م}$
يوضع أن $\text{حـ}^{\text{س}} = \text{ص}$ فيكون $\text{حـ}^{\text{ص}} = \text{م}$ وهذه معادلة يوجد منها

أن ص = $\frac{\text{لو هـ}}{\text{لو حـ}}$ فاذا وضع مقدار ص فى المعادلة $\text{ح}^{\text{س}}$ = ص حدث

$$\text{س} = \frac{\text{لو}(\text{لو هـ}) - \text{لو}(\text{لو حـ})}{\text{لو ء}}$$

واذا اريد حل المعادلة $\text{حـ}^{\text{س}+\text{ء}} - \frac{\text{ء}}{\text{س}-1} = \text{هـ}$

يفرض أن $\text{حـ}^{\text{س}} = \text{ع}$ فيكون $\text{حـ}^{\text{ء}} \times \text{ع} - \frac{\text{حـ}^{\text{ء}}}{\text{ع}} = \text{هـ}$ أى $\text{حـ}^{\text{ء}}\text{ع} - \text{هـ ع} = \text{حـ}^{\text{ء}}$

وهذه المعادلة الأخيرة يعلم منها مقدار المجهول ع فاذا كان لهذا المجهول مقدار موجب تحصل مقدار س المطابق له بوضع هذا المقدار الموجب بدل ع فى المعادلة $\text{حـ}^{\text{س}} = \text{ع}$

بند ١٧١ قد ذكر فى علم الحساب أن نظرية اللوغارتمات ناتجة من نظرية المتواليات

لنوضح ذلك فنقول ــــــ

اذا فرضت متوالية هندسية حدها الأول ١ وأساسها كمية تختلف عن الواحد بقليل وحدودها تأخذ فى الازدياد بمقادير صغيرة جدًّا بحيث تكاد تدرك بشرط أن تكون هذه المتوالية محتوية على جميع الاعداد وفرضت أيضًا متوالية عددية حدها الأول صفر واساسها كمية صغيرة جدًّا بحيث أن هاتين المتواليتين مكتوبتان على وجه بحيث تكون حدود المتوالية الثانية موضوعة تحت حدود المتوالية الاولى ويكون صفر المتوالية العددية

محاذيا

محاذياً للحد ا من المتوالية الهندسية يسمى كل حد من حدود المتوالية الجديدة

اسم لوغاريتم الحد المحاذي له من المتوالية الهندسية :

واللوغاريتمات المكونة بهذه المثابة هي أسس القوى التي يرفع اليها عدد ثابت

فتكون من ذلك الاعداد التي تكون لها هذه اللوغاريتمات لانه اذا رمز

بالرمز ك لكمية ثابتة يمكن اعتبارها مقربة من الواحد بكمية صغيرة جداً

وفرضت المتواليتان

ب ..... ك^٣ : ك^٢ : ك^١ : ١ : ك : ك^٢ : ك^٣ : ..... مخ

ب ..... -٣ء : -٢ء : -ء : صفر : ء : ٢ء : ٣ء : ..... مخ

فنجعل م ء = ا ، ك^م = ح يحدث

ك^ء = ح^١ = ك

وحينئذ تكتب المتوالية الهندسية هكذا :

ب ..... ح^-٣ : ح^-٢ : ح^-١ : ١ : ح^١ : ح^٢ : ح^٣ : .....

ومن هنا يشاهد أن حدود هذه المتوالية هي مقادير متغير ص المستنتجة

من فرض المعادلة ص = ح^س وما مقادير متغير س فانها تتغير

بواسطة الحدود المختلفة لمتوالية الحسابية

في اللوغارتمات التي أساسها ١٠

واستعمال الجداول اللوغارتمية

بند ١١ أما لوغارتمات الاعدد ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، الخ فهي ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... الخ

وأما لوغارتمات الأعداد التي ليست من القوى الصحيحة للعدد ١٠ فلا يمكن بيانها الا بوجه التقريب (كما في بند ١٦٦) وهذه اللوغارتمات التقريبية تتعين بعدد اعشاري وأما الجزء الصحيح للوغارتم عدد اكبر من الواحد فانه يحتوي على عدة من الآحاد مساوية لعدد ارقام هذا الجزء ناقصة واحداً لانه اذا رمز لعدد ارقام الجزء الصحيح بالرمز ح كان محصوراً بين $١٠^{ح-١}$ ، $١٠^{ح}$ وبناء على ذلك يكون لوغارتمه محصوراً بين ح - ١ ، ح وحينئذ يكون مركباً من احاد عددها ح - ١ ومن جزء اعشاري أقل من الواحد ولذا اطلق على الجزء الصحيح من كل لوغارتم اسم العدد البياني

بند ١٧٥ حيث أن الجداول اللوغارتمية لا تحتوي الا على لوغارتمات الاعداد الصحيحة فيلزم لايجاد لوغارتم كسر ان تطبق عليه القاعدة المتقدمة (في بند ١٦٨) ومتى كان الكسر المفروض اقل من الواحد امكن تعيين لوغارتمه السالب على وجه بحيث يكون جزءه الاعشاري موجباً ولذا يلزم ان يضاف بالاختيار

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

فبكتب كذا

[illegible]

والعلامة [illegible] المرسومة [illegible]

فالمراد [illegible]

شوهد أن

[illegible]

[illegible]

وهذا التحويل [illegible]

- الأول من [illegible]

فيلزم تحويل [illegible]

ان يجري على أجزاء الاعتبار [illegible] في حالة سابقة

ويضاف الى عدده البيانى واحد لان

$\bar{٤},٢٤٦٨٩٩ = -٤ - ٠,٢٤٦٨٩٩ = -٣ + (١ - ٠,٢٤٦٨٩٩)$

$= \bar{٣},٧٦٥٣١٠١$

واذا اريد ضرب اللوغاريتم $\bar{٣},٧٦٥٣١٠١$ فى عدد صحيح كالعدد ٤ مثلاً فان حاصل الضرب يكتب هكذا

$٤ \times ٣١٠١ \times ٠,٧٦٥ + ٤ \times ٣ \text{ أو } \bar{٩},٠٦١٤٠٤$

ومتى كان لوغاريتم مكوناً من عدد بيانى سالب وجزء اعشارى موجب واريد قسمته على عدد صحيح لزم أن يؤخذ خارج قسمة العدد البيانى على وجه بحيث يكون الباقى موجباً مثلاً اذا قسم $\bar{٧},٣٢٩٥٦٤٢$ على ٣ كان خارج قسمة -٧ على ٣ هو -٣ والباقى -١ أو خارج القسمة -٣ والباقى $+٢$ وبالتالى العمل هكذا يحدث $\bar{٣},٧٧٦٥٢١٤$ وهو الناتج المطلوب

بند ١٧٦ يؤخذ من القواعد المتقدمة (فى بند ١٦٨) أن

$$\text{لو}(\text{ح} \times ١٠^{\text{ن}}) = \text{لو ح} + \text{لو } ١٠^{\text{ن}} = \text{لو ح} + \text{ن}$$

$$\text{لو}\left(\frac{\text{ح}}{١٠^{\text{ن}}}\right) = \text{لو ح} - \text{لو } ١٠^{\text{ن}} = \text{لو ح} - \text{ن}$$

ومن هذا ينتج أن لوغاريتم حاصل ضرب عدد فى القوة الصحيحة للعدد ١٠ أو

خارج

خارج قسمته عليه يكون مساويًا للوغاريتم هذا العدد مضافًا إليه ومطروحًا منه

حاصل ضرب بقدر درجة القوة الصحيحة للعدد ١٠

ويؤخذ من ذلك أن لوغاريتم العدد الاعشاري الذي يزيد عن الواحد ويوجد

العدد الاعشاري الذي ينقص عن الواحد ويكون عدده البياني سالبًا يتحدد

في الجزء الاعشاري الذي هو لوغاريتم العدد الصحيح المكون بقطع

عن الشرطة

وحينئذ يسهل معرفة العدد البياني للوغاريتم عدد اعشاري صحيح من لوغاريتمه

لانه اذا رمز بالرمز ج لعدد الأصفار الواقعة بين الشرطة واول رقم

معنوي يوجد عن يمينها كان العدد المفروض أصغر من $\frac{1}{10^{ج}}$ والكسر $\frac{1}{10^{ج+1}}$

وحينئذ يكون لوغاريتم هذا العدد محصورًا بين $-ج$ و $-(ج+1)$ أعني

أن هذا اللوغاريتم يكون مساويًا $-(ج+1)$ مضافًا إليه جزء اعشاري

موجب أوله يكون مساويًا $-ج$ مضافًا إليه جزء اعشاري سالب

نهاية

وإذا [illegible] لوغاريتم عدد اعشاري صحيح وجد سوى

كان العدد البياني مساويًا للعدد [illegible] وبدفع [illegible] يوجد عن يمين

شرطة فى العدد المفروض

وثانياً متى كان اللوغاريتم سالباً بالكلية كان عدده اليبانى أقل بواحد من العدد الدال على مرتبة أول رقم معنوى يوجد عن يمين الشرطة فى العدد المفروض وعلى ذلك يكون العدد اليبانى الموجب أو السالب للوغاريتم ذا الأعلى مرتبة أعظم آحاد العدد الذى ينسب اليه هذا اللوغاريتم

بند ١٧٠ تطبيق اللوغاريتمات على العمليات العددية بواسطة الجداول يتوقف على حل مسئلتين

(الأولى) المعلوم عدد والمراد ايجاد لوغاريتمه

(والثانية) المعلوم لوغاريتم عدد والمراد ايجاد هذا العدد

تنبيه يكفى لحل المسئلة الأولى ان نذكر الجداول المستعملة فى ذلك فنقول جداول لالاند وجداول دينو وماري تحتوى على لوغاريتمات الاعداد الصحيحة من ابتداء الواحد الى ١٠٠٠٠ وأما جداول كاليه فانها تحتوى على لوغاريتمات هذه الأعداد من ابتداء الواحد الى ١٠٨٠٠٠ غير أنه لا يوجد بها عدد يبانى لكونه يسهل ايجاده (بمقتضى بند ١٧٤) من اول وهلة

فاذا كان

فاذا كان لوغارتم العدد الصحيح يزيد عن أكبر الاعداد التي توجد بجدول فانه
يلزم أن ينفصل عن يمين هذا العدد بالشرطة عدة من الارقام بحيث يكون
الباقي أكبر عدد يوجد بين نهايتي الجدول وحينئذ يكون هذا العدد
كناية عن عشاري صحيح اذا رمز لجزئه الصحيح بالرمز ج ولجزئه الاعشاري
بالرمز ء وللجزء الاعشاري من لوغارتم العدد ج بالرمز س ... للفرق الكائن بين لوغارتمي العددين ج ، ج + ء محسوب في الجدول ... حدثت المناسبة

١ : ء :: ء' : س

التي يؤخذ منها أن س = ء × ء'

فينبغي أن يضم مقدار س الى ن ليتكون من ذلك جزء الاعشاري للوغارتم العدد ج + ء الذي هو الجزء الاعشاري للوغارتم العدد الصحيح المعلوم وأما عدده البياني فيتعين بالكيفية المتقدمة

ومتى كان العدد المفروض عدداً اعشارياً أكبر من الوحد وأصغر منه كان عدده البياني معلوماً دائماً وحيث أن جزءه الاعشاري لا يتغير اذا قطع النظر عن شرطة في ذلك العدد المفروض فيتعين لوغارتمه بالكيفية السابقة

فاذا كان العدد المعلوم مشتملاً على اعداد صحيحة وكسور حوّل الى كسر واحد لوغاريتمه يتعين بالكيفية المتقدمة (في بند ١٦٨)

ويكفي لحل المسئلة الثانية أن يقال حيث أن العدد البياني للوغاريتم يدل دائماً على مرتبة أعظم احاد في العدد المطلوب (كما في بند ١٧٥) فلا يعتبر غير الجزء الأعشاري من اللوغاريتم وأما العدد البياني فيقطع النظر عنه ثم يبحث عن العدد المطابق لهذا الجزء الاعشاري ويضرب في القوة الموافقة للعدد ١٠ أو يقسم عليها فأما ان كان الجزء الاعشاري للوغاريتم معلوم موجوداً في الجداول بالضبط فان العدد المطابق له يعلم من اول وهلة

واما ان كان لا يوجد فيها بالضبط فانه يبحث عن الجزء المقرب منه بحيث لا يزيد عنه فاذا رمز بالرمز ل للجزء المقرب منه وبالرمز ح للعدد الصحيح المطابق له وبالرمز لَ للجزء الاعشاري من اللوغاريتم وبالرمز ء للفرق الكائن بين لوغاريتمي ح ، ح+١ وبالرمز ءَ للفرق لَ - ل تحصلت المتناسبة

ء : ءَ :: ١ : س التي يعلم منها أن س = $\frac{ءَ}{ء}$ وهذا المقدار الاعشاري يضاف الى العدد ح ليتكون عدد يكون الجزء الاعشاري للوغاريتمه دالاً على الجزء الاعشاري من اللوغاريتم المعلوم

ومتى

ومتى كان اللوغاريتم المعلوم سالبا بتمامه [illegible] لوغاريتم يكون جزءه

الاعشاري موجبا ثم يجري [illegible] سابق

١٧١ ويوجد في جداول كاليه تحت عنوان [illegible] لاوجزء تعرفه لوغاريتمات

الاعداد الصحيحة من ابتداء الواحد الى [illegible] وهذه اللوغاريتمات مبنية

بثمانية ارقام [illegible] وصنوج بهذا العدد [illegible]

وجر [illegible] الوسيع يشتمل على لوغاريتمات جميع الاعداد الصحيحة من

ابتداء [illegible] الى [illegible]

فاعمد [illegible] يحتوي على جميع الاعداد من ابتداء [illegible]

الى [illegible] والعمود الثاني [illegible] لوغاريتمات هذه الاعداد

والاعداد [illegible] التي توجد [illegible] بعض بحيث يكون [illegible]

والاجزاء الاعشارية [illegible]

هي الاجزاء الاعشارية [illegible] من بعضها بالعدد

[illegible] الاعداد [illegible]

[illegible]

مثلاً اذا اريد معرفة لوغارتم العدد ٢٧٧٩٦ . يبحث في الصف ٢ عن العدد ٢٧٧٩ وعلى استقامة الصف الافقي المحتوي على هذا العدد الى الصف المبين بالعدد ٦ نرى فيه الارقام الاخيرة للوغارتم المطلوب ولتعيين ارقامه الاول يؤخذ العدد المنعزل الاكثر قربًا منه بالصعود الى الصف المبين بالصفر فيحدث باعتبار العدد اليابانى

لو ٢٧٧٩٨ = ٤,٤٤٤٠١٣٦

والفرق بين لوغارتمي عددين صحيحين متواليين يوجد في الصف الأخير (من جهة اليمين) المبين بالرمز (فرق) المكتوب في رأس الجدول الصغير الأكثر قربًا من هذه الاعداد لكنه يلاحظ أن هذا الفرق يدل على آحاد من المرتبة الأخيرة وتؤخذ من الجدول النسبي الكائن تحت الصف المذكور حواصل ضرب هذا الفرق في ١,٠ ، ٢,٠ ، ٣,٠ ، ٤,٠ ، ٥,٠ ، ٦,٠ ، ٧,٠ ، ٨,٠ ، ٩,٠

ومن هنا ينتج بالسهولة حاصل ضرب هذا الفرق في أي كسر اعشاري وحينئذ يمكن بواسطة هذا الجدول الاستغناء عن اجراء العمليات الناتجة من المناسبة المتقدمة

مثلاً اذا اريد معرفة لوغارتم العدد ١٤٥١٨٤٦٩ لزم ان تفصل عنه

بالشرطة

من جهة الشمال أرقامه الخمسة الاول فيؤول الى ١٤٥١٨,٤٦٩ وحينئذ يرى أن لوغاريتم الجزء ١٤٥١٨ هو ٠,١٦١٩٠٦٨ وجدول الفروق الأعظم قريبًا منه هو الجدول المحتوى على ٢٩٩ . وفي هذا الجدول يرى أن الأعداد المطابقة للأعداد ٤ ، ٦ ، ٩ المعتبرة أعشارًا هي ١٢٠ و ٧٩ و ٢٦٩ التي يؤخذ منها أن

٢٩٩ × ٠,٤ = ١٢٠ و ٢٩٩ × ٠,٠٠٦ = ١,٧٩ و ٢٩٩ × ٠,٠٠٠٩ = ٠,٢٦٩

وحينئذ يتحصل اللوغاريتم المطلوب بهذه الكيفية وهي نهمل في الآحاد الاخيرة من لوغاريتم العدد ١٤٥١٨ الاعداد ٠ و ٠ و ٠ و ٠,٢٦٩ وطريقة الحساب هي

لو ١٤٥١٨		٠,١٦١٩٠٦٨
المقدار المتطابق مع	٠,٤	١٢٠
المقدار المتطابق مع	٠,٠٠٦	١,٧٩
المقدار المتطابق مع	٠,٠٠٠٩	٠,٢٦٩
		٠,٦١٩٠٦٩

فاذا اريد الآن معرفة العدد الذي لوغاريتمه معلوم ونريد أن الجزء الأعشاري لهذا اللوغاريتم هو ٠,٦١٩٠٦٩ فانه يحسب بين لوغاريتمات اعداد الأرقام

الأربعة الكائنة في الصف المبين بالصفر عن اللوغاريتم الاعظم قرباً من اللوغاريتم المعلوم بدون أن يزيد عنه ويؤخذ العدد المطابق له وهو ١٤٥١ وبالسلوك على استقامة الصف الافقي المذكور يشاهد العدد الذي يقرب كل القرب من ٩٢٠٩ المتكون من الارقام الأربعة الأخيرة التي يتركب منها اللوغاريتم وهذا العدد هو ٩٠٦٨ الذي يوجد في الصف المبين بالعدد ٨ وحينئذ يكون الفرق بين ٩٠٦٨ و ٩٢٠٩٥ هو ١٤١ ثم يبحث في جدول الفروق عن العدد الذي يقرب من ١٤١ ولا يزيد عنه فيرى أنه ١٢٠ وهو المطابق للعدد ٤ر٠ وحيث أن الفرق بين ١٢٠ و ١٤١ هو ٢١ فيضرب هذا الأخير في ١٠ ويبحث عن العدد الأقرب من حاصل الضرب وهو ٢١٠ فيشاهد أنه ٢٠٩ وهو المطابق للعدد ٧ر٠ وبتوالي العمل هكذا يرى أن العدد المطلوب هو ١٤١٥٨٫٤٧ وذلك بقطع النظر عن مرتبة اعظم الآحاد وكيفية وضع العلية هي

لو س = ٩٢٠٩ر١٦١ر٠

والمقدار المطابق	.... ٩٠٦٨ر١٦١ر٠	هو ١٤٥١٨
والمقدار المطابق للباقي الاول	١٤١	هو ٤ر٠
والمقدار المطابق للباقي الثاني	٢١	هو ٧ر٠

سند المتمم الرقمي للوغارتم هو العدد الذي اذا اضيف اليه كان الحاصل ١٠ ومن هنا
١٧٨
يؤخذ أن المتمم الرقمي للوغارتم يحصل من طرحه من ١٠ وذلك بطرح اول رقم
يوجد عن يمينه من ١٠ وطرح باقي أرقامه من ٩

والمتمم الرقمي يستعمل دائماً لاجتناب اللوغارتمات السالبة ولايجاد باقي حاصل
جمع مطروحًا منه عدة لوغارتمات بواسطة عمليات جمع وذلك بأن نؤخذ
المتممات الرقمية للوغارتمات التي يراد طرحها وتضاف الى اللوغارتمات
الاخرى وحيث أنه يشاهد بالسهولة أن حاصل الجمع يزيد عن الحاصل
المطلوب عشرات بعدد المتممات الرقمية فيلزم لتحصيل الناتج الحقيقي أن
تطرح هذه العشرات من حاصل الجمع وهذه العملية لا تجري الا على الجزء الصحيح
وحده

امثلة حسابية محلولة باللوغارتم

المثال الاول اذا اريد ايجاد النتيجة المبينة بالمعادلة

$$س = \frac{٢٣٩ \times ٨٢٧ \times ٥٤٣}{٧٦ \times ١٧}$$ تجري العمل هكذا

لوغا ٢٣٩ = ٢,٣٧٨٣٩٧٩
لوغا ٨٢٧ = ٢,٩١٧٥٠٥٥
لوغا ٥٤٣ = ٢,٧٣٤٧٩٩٨
متمم لوغا ٧٦ = ٨,١١٩١٨٦٤
متمم لوغا ١٧ = ٨,٧٦٩٥٥١١
لوغا س = ٤,٩١٩٤٤٠٧

العدد سابق ٩١٩٤٣٩٠ ..... هو ٨٣٠٦٩

باقى أول ٠٠٧ ..... هو ٣ ر٠

باقى ثانى ١ ..... هو ٢ ر٠

س = ٨٣٠٦٩ ر ٣٢

وباجراء عملية حسابية على هذا المقدار يجد س = ٨٣٠٦٩ ر ٣٣٣

وحينئذ لا يؤخذ من استعمال اللوغارتمات غير الارقام الستة الاولى

من هذا العدد فاذا لم يستعمل المتمم الرقمى فانه يلزم أن يستعمل لذلك بدل عملية

الجمع جمعان وطرح واحد

(المثال الثانى) اذا اريد حساب ٢^٦٤ يجرى العمل هكذا

لوغا ٢ = ٠٠ ٣٠١٠٣ ر٠

٦٤ × لوغا ٢ = ٠٠ ٢٦٥٩٢ ر١٩

٢^٦٤ ..... ١٨٤٤٦٧٥

ولما كان يمكن وقوع خطأ فى حاصل ضرب ٢ × ٦٤ هو بالتقريب فى ٣٢

من آحاد المرتبة السابعة وكان الفرق بين لوغارتمى العددين ١٨٤٤٦

و ١٨٤٤٧ هو ٢٣٦ آحاداً من هذه المرتبة أمكن أن يكون مقدار الخطأ

الواقع فى العدد المطلوب $\frac{٣٢}{٢٣٦}$ من واحد من خامس الأرقام بالابتداء

من الشمال ومن هنا يعلم أنه لم يتحقق غير الأرقام الخمسة الاولى

لكنه يتيسر أحد وثمانين العدد ، مقرنًا من رقمين أو ثلاثة أرقام أعشارية
لأن جداء الكلية تشمل زيادة عن الجزئين الأولين مجموعها ثمانية الأعداد
من ابتداء الواحد إلى ١٠٠٠ محسوبة بعشرين من الأرقام الأعشارية
وحينئذ يتحصل لوغارتم (٤)^٦٤ مقرنًا بأقل من واحد من المرتبة الثانية
ومن هنا ينتج مقدار مضبوط للعدد المطلوب وحينئذ يتحصل بعده المشابهة

لو ١٤ = ١٠٢٩٩٩٩٥ ٠

٦٤ لوغا ٤ = ١٩٫٤٦٣٩١٩٧

٤^٦٤ = ١٨٤٤٦٧٤٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠

(المثال الثالث) إذا أريد حساب المقدار $\sqrt[5]{\frac{43}{417}}$ بتجزئ العدد

لوغا ٤٣ = ٠٫٣٦١٧٤٧٨

متمم لو ٤١٧ = ٠٫٠٤١٨٦٣٩

لو $\frac{43}{417}$ = ٢٫٧٦١٥٩١٧

٢ × لو $\frac{43}{417}$ = ٥٫٥٢٣٠٧٧٥١

$\frac{3}{5}$ × لو $\frac{43}{417}$ = ٣٫٣١٦٩٥٥٠ ، $\sqrt[5]{\frac{43}{417}}$ = ٠٫٢٠٧٠٧

والعدد البياني = ١ للوس = $\sqrt[3]{\frac{43}{417}}$ يدل على أن المرتبة لآحاد العدد

المطلوب هو مرتبة العشرات فاذا اريد تحصيل الناتج مقرباً من ٠٠٠٠١ ر فانه يكفي لذلك تحصيل خمسة ارقام وذلك بقطع النظر عن استعمال الاجزاء المتناسبة

المثال الرابع) اذا اريد حل المعادلة $(١٫٠٠١٢٥)^{س} = ٨٩٦٫٢٥$ فلجزء العمل يجد ـ

$$س = \frac{لو(٨٩٦٫٢٥)}{لو(١٫٠٠١٢٥)} = -٨٨١٫٦٨٧$$

في الربح البسيط والمركب

١٧٩ اللوغارتمات تستعمل ايضاً في حل المسائل المتعلقة بربح النقود مثلاً اذا جعل ر رمزاً لربح الفرنك الواحد في السنة الواحدة فيكون ربح ١٠٠ في هذه المدة ١٠٠ر وبناء على ذلك يكون ربح المبلغ ح في السنة الواحدة ح ر ويكون ح ربحه في مدة صحيحة أو كسرية من السنين مبيناً بالرمز ك هو ك × ح ر وبالجملة اذا جعل ج رمزاً لما يؤول اليه المبلغ ح في المدة ك من السنين حدث

ج = ح (١ + ك ر) ومن هنا يؤخذ

= ر

$$ر = \frac{ج - د}{ك} \quad , \quad ك = \frac{ج - د}{ر} \quad د = \frac{ج}{(١ + ك ر)}$$

وهذه القوانين الأربعة يؤخذ منها حل جميع المسائل متعلقة بالأرباح البسيطة

فأما القانون الأخير فيعلم منه المقدار المتحصل عنه ج الذي لا يدفع الا في المدة ك من السنين لان المبلغ د هو الذي يلزم استقراضه في هذه المدة ليتحصل في آخرها ج وأما مقدار د المأخوذ من هذا القانون فهو المبلغ الذي يمكن تحصيله من صراف استعمله في متجر رأس ماله ج ولا يدفع الا في المدة ك من السنين وأما الفرق ج - د وهو المجوز في صدوق الصراف فانه يعرف بالفائدة الداخلة للمبلغ ج وهذه الفائدة هي المساوية لربح المبلغ د في المدة ك استحقاقه التي يدفع فيها المبلغ د وأما الفائدة الخارجة للمبلغ ج التي هي ربح هذا المبلغ في المدة المذكورة فهي ك د ر ج . ومن هذا يعلم انه لا يتحصل عن المال الذي قدره ج مبلغا في من الفائدة الخارجة غير ج (١ - ك ر)

ب ١٨٠ ويقال للربح مركب اذا كان رب المال لا يأخذ ربح ماله في كل سنة بل يضمه الى الأصل ويتركه بين يدي المقترض مع رأس المال مدة هذا الزمن فيكون رأس المال في آخر السنة الاولى

د + د (١ + ر)

ويكون المبلغ حَ في آخر السنة الثانية

$$حً = حَ (١+ر) = ح (١+ر)^{٢}$$

ويكون المبلغ حً في آخر السنة الثالثة

$$حً = حً (١+ر) = ح (١+ر)^{٣} .$$

وبالاستمرار هكذا الى سنوات عددها ن يكون المبلغ الأصلي ح في آخر السنة ن

$$ج = ح (١+ر)^{ن}$$

وبتطبيق اللوغارتم على هذا القانون يحصل

$$ج = لو ح + ن \times لو (١+ر)$$

وحينئذ تحصل بمقتضى هذا القانون واحدة من الكميات الاربع وهي ج ، ح ، ر ، ن اذا علمت الثلاث الاخرى منها .

بند ١٨١ اذا فرض أن رب المال أضاف في كل سنة الى رأس ماله مبلغاً جديداً لا تزال تحصل عنه ارباح مركبة الى أن يستولاه من المقترض وجعلت ح ، ز ، ه و ل رموزاً للمبالغ التي يضعها في مبادي السنة الاولى والثانية والثالثة والرابعة و ج رمزاً للمبلغ الذي يحصل في آخر السنة ن فيكون

المبلغ

الباقى تحت يد المقترض مدة ن سنة

$$ح(١+ر)^{ن}$$

ويكون المبلغ د فى مدة ن - ١ سنة

$$د(١+ر)^{ن-١}$$

ويكون المبلغ هـ فى مدة ن - ٢ سنة

$$هـ(١+ر)^{ن-٢}$$ وهلم جرا

وحينئذ يكون المبلغ الأخير فى مدة سنة واحدة

$$ل(١+ر)$$

وبناء على ذلك يتحصل

$$ج = ح(١+ر)^{ن} + د(١+ر)^{ن-١} + هـ(١+ر)^{ن-٢} + \dots + ل(١+ر)$$

فاذا فرض أن ح = د = هـ = ... = ل فان الطرف الثانى من هذه المعادلة يؤول الى متوالية هندسية حدها الاول ح(١+ر) وأساسها (١+ر) وحينئذ يتحصل (بالتقنين سابقا)

$$ج = \frac{ح(١+ر)[(١+ر)^{ن} - ١]}{ر}$$

والدفعة السنوية هى المبلغ الذى يتكفل بدفعه المقترض فى كل سنة ليستوفى رب المال رأس ماله بأرباحه فى مدة معينة من الزمن فاذا

جعل ج رمزاً لرأس المال الذي يقتضي دفعه لربه و ح رمزاً للمبلغ الذي يدفع سنوياً في مدة من السنين عددها ن فانه يمكن أن تعتبر الدفعات التي يدفعها المقترض قبل انقضاء المدة كمرصنة على رب المال فيكون لمقدارها تعلق بالزمن الذي من الابتداء الى انقضا المدة المذكورة وحينئذ تكون الدفعة الاولى التي استلمها رب المال قبل انقضاء المدة بسنين عددها ن - ١ مساوية ح $(١+ر)^{ن-١}$ والدفعة الثانية مساوية ح $(١+ر)^{ن-٢}$ وهكذا الى الدفعة الأخيرة المساوية ح فقط وقد سبق أن المال المقترض من ربة المبين بالرمز ج يكون ربحه مدة ن سنة مساوياً ج $(١+ر)^{ن}$

وحينئذ يحدث

$$ج(١+ر)^{ن} = ح(١+ر)^{ن-١} + ح(١+ر)^{ن-٢} + \dots\dots + ح$$

وهذه المعادلة تؤول الى

$$ج(١+ر)^{ن} = \frac{ح[(١+ر)^{ن}-١]}{ر}$$

وهذه المعادلة توخذ منها واحدة من الكميات الاربع متى علم منها ثلاث فاما تعيين مقدار ر فانه يتعلق بحل معادلة درجتها ن واما مقدار ن فانه يستخرج من المعادلة

$(\text{د} - \text{ح}\,\text{ر})(1+\text{ر})^{\text{م}} = \text{ح}$ التي ينتج منها $(1+\text{ر})^{\text{م}} = \frac{\text{ح}}{\text{د} - \text{ح}\,\text{ر}}$

ومن هنا يحدث

$$\text{م} = \frac{\text{لو}\,\text{ح} - \text{لو}(\text{د} - \text{ح}\,\text{ر})}{\text{لو}(1+\text{ر})}$$

فاذا اريد المقارنة بين مقادير شدة مبالغ مدفوعة في ازمنة مختلفة فانه يلزم ان تكون هذه المبالغ منسوبة الى زمن واحد كما حصل في المسئلة السابقة مثلاً اذا فرض ان صرافاً استلم مبلغاً قدره ح ولزم ان يدفعه بعد مدة من السنين عددها م فلاستخلاص هذا الصراف يلزم أنه يدفع لرب المبلغ المذكور شيأً قيمته و يكون مدفوعاً مدة من السنين عددها ع واذا بحث عما يؤول اليه المبلغان ح و و بعد انقضاء المدة تحصل

$$\frac{\text{ح}}{(1+\text{ر})^{\text{م}}} \text{ و } \frac{\text{و}}{(1+\text{ر})^{\text{ع}}}$$

لان المبلغ الاول مثلاً يعتبر كمقدار اصلي لرأس مال يؤول الى ح بعد عدة سنين عددها م وينتج من ذلك انه اذا اخذ الفاضل بين الكسرين المذكورين كان هذا الفاضل سواء كان موجباً أو سالباً كافياً في ان يدفعه الصراف أو يستلمه في مقابلة الاستبدال واذا فرض أن هذا الفاضل لا يمكن دفعه بعد مدة من السنين قدرها ك وجعل هـ رمزاً

لمقداره عند الاستبدال كان هذا المبلغ بعد المدة ك مساويًا هـ (١+ر)^ك

ومكافئًا للجملة

$$\left[\left(\frac{\text{ج}}{\text{ر}(\text{ر}+1)}\right)-\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}(\text{ر}+1)}\right)\right](\text{ر}+1)^{\text{ك}}=\text{د}(\text{ر}+1)^{\text{ك}-\text{ج}}\,\text{د}(\text{ر}+1)^{\text{ك}-\text{ج}}$$

الباب السابع

في التوافيق والتراتيب والتباديل وفذلكة نيوتون

مثال ١٨٣ التوافيق لحروف عددها م أو لحواصل ضربها المختلفة التي كل واحد منها يشتمل على حروف عددها ج هي الحواصل الحادثة من كتابة هذه الحروف بجوار بعضها على وجه بحيث يكون كل توفيق مشتملاً على حروف عددها ج من غير أن يتكرر اثنان من هذه التوافيق

مثلاً التوافيق أو حواصل الضرب المختلفة المركبة من الحروف الأربعة

ج ، د ، هـ ، و مثنى هي

ج د ، ج هـ ، ج و

د هـ ، د و

هـ و

فيشاهد من هنا انه يلزم لتركيب هذه الحواصل المختلفة ان تكتب الحرف ج

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

عددها ح من الحروف التي عددها م بجوار بعضها وتغيير سائر أوضاع الحروف ومن هنا يؤخذ أنه اذا ركبت تباديل كل من التوافيق لحروف عددها م أو كل من حواصل ضربها التي كل واحد منها مشتمل على حروف عددها ح حدث من ذلك التراتيب لحروف عددها م أو حواصل ضربها التي كل واحد منها مشتمل على حروف عددها ح مثلاً التراتيب أو حواصل الضرب المختلفة المركبة من الحروف الأربعة ح ، ى ، هـ ، و مثنى هي

ح ى ، ى ح ، ح هـ ، هـ ح ، ح و ، و ح ، ى هـ ، هـ ى ، ى و ، و ى ، هـ و ، و هـ

والتراتيب أو حواصل الضرب المختلفة المركبة من الحروف الأربعة المذكورة ثلاث هي

ح ى هـ	ح ى و	ح هـ و	ى هـ و
ح هـ ى	ح و ى	ح و هـ	ى و هـ
هـ ح ى	و ح ى	و ح هـ	و ى هـ
ى ح هـ	ى ح و	هـ ح و	هـ ى و
ى هـ ح	ى و ح	هـ و ح	هـ و ى
هـ ى ح	و ى ح	و هـ ح	و هـ ى

ينب ٢٨٩ ولبيان الكيفية التي بها يعلم عدد التراتيب لحروف عددها م أو لحواصل ضربها المركبة من حروف عددها م والتباديل لحروف عددها م أو الحواصل المختلفة لحروف عددها م كل واحد منها مشتمل على حروف عددها م يقال

حيث أنه يلزم لتكوين التراتيب لحروف عددها م مثنى ان تكتب على التوالي بجوار كل واحد منها الحروف الباقية التي عددها م-١ فيكون عدد التراتيب لحروف عددها م مثنى هو م(م-١)

وحيث انه يلزم لتكوين التراتيب لحروف عددها م ثلاث أن يكتب بجوار كل من تراتيب هذه الحروف مثنى كل من الحروف الباقية التي عددها م-٢ فيكون عدد التراتيب لحروف عددها م ثلاث هو م(م-١)(م-٢) لانه يحدث من كل من تراتيب الحروف المذكورة مثنى ترتيب ثلاثية عددها م-٢ وحيث أن عدد التراتيب مثنى هو م(م-١) فيكون م(م-١)(م-٢) دالاً على عدد التراتيب ثلاث وبمقتضى ما تقدم يكون عدد التراتيب لحروف عددها م رباع هو م(م-١)(م-٢)(م-٣)

وبناء عليه يكون عدد تراتيب حروف [illegible] أو حاصل ضرب التراتيب

واحد منها مشتمل على حروف عددها م مساويًا على العموم

م (م-١) (م-٢) (م-٣) (م-٤) ..... [م-(ن-١)]

فاذا فرض أن م = ن فان التراتيب تتحول الى تبادل يكون عددها مساويًا

ن (ن-١) (ن-٢) (ن-٣) ..... ٣ × ٢ × ١ واذا قلب الوضع

حدث ١ × ٢ × ٣ × ٤ ..... (ن-٣) (ن-٢) (ن-١) وهذا هو المقدار

المساوي لعدد تبادل حروف عددها ن

ويمكن ايضًا تحصيل هذا المقدار الاخير بدون التفات الى القانون الدال على

عدد التراتيب بأن يقال حيث أنه تحصل من الحرفين د ، ه التبادلات

د ، ه ، ه د وانه يكفي لتكوين تبادل ثلاثة حروف أن يكتب بعد كل من

هذه الحروف تبادلا الحرفين الاخيرين فيكون عدد التبادل لحروف

عددها ٣ هو ٢ × ٣ وحيث انه يلزم لتكوين تبادل اربعة حروف

ان تكتب بعد كل من هذه الحروف تبادل الحروف الثلاثة الباقية فيكون عدد

التبادل لهذه الحروف الاربعة هو ٢ × ٣ × ٤ وبتوالي العمل هكذا يكون

عدد تبادل حروف عددها ن مبينًا بالكتابة ١ × ٢ × ٣ × ٤ ..... × ن

[illegible] ولايجاد عدد التوافيق أو الخواص المختلفة [illegible] كل وحد [illegible]

مشتمل على حروف عددها م يرمز لهذا العدد بالرمز د ثم يرمز بالرمز ت

لعدد تراتيب حروف عددها م أو خواص ضربها التي كل واحد منها مشتمل

على حروف عددها م ثم بالرمز ن لعدد [illegible] حروف عددها م

وحيث أنه يرى بالبداهة أنه اذا كانت [illegible] الخواص المختلفة

[illegible] عددها م [illegible] عددها م فتخص

[illegible] التي [illegible]

[illegible] على حروف عددها م وذلك بأن يجري على كل من [illegible]

[illegible] سائر التراتيب [illegible] حروف عددها م وحينئذ يكون عدد الترتيب

[illegible] مضروبا في عدد التوافيق أي ت = ن × د

وهنا [illegible] ذلك المستخلص كل من ت، ن بعد [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] بكون [illegible] مترتبة لكية [illegible]

لا لكية [illegible] عندما يكون الأول [illegible] موجبا لكية [illegible]

بالبحث من قاعدة هذه القوى الصحيحة الى قانون به تتحصل أى قوة . هذا القانون هو الذى يعرف بقانون نوتون لكونه هو الذى استكشفه فاذا حسبت بواسطة عملية الضرب قوى س + ح بالابتداء من القوة الثانية حدث

$$(س + ح)^{٢} = س^{٢} + ٢ ح س + ح^{٢}$$

$$(س + ح)^{٣} = س^{٣} + ٣ ح س + ٣ ح^{٢} س + ح^{٣}$$

$$(س + ح)^{٤} = س^{٤} + ٤ ح س^{٣} + ٦ ح^{٢} س^{٢} + ٤ ح^{٣} س + ح^{٤}$$

وحينئذ يشاهد فى هذه القوى المختلفة أن قاعدة أسس الحرفين س ، ح تعلم بداهة غير انه لا يمكن معرفة القاعدة التى بموجبها تتكون المكررات الرقمية وحيث انه يلزم لتوضيح تركيب الحواصل أن نكتب الارتباطات التى تتولد منها المكررات فيكفى لذلك أن نجرى على الكميات ذات الحدين المختلفة من بعضها بالحد الثانى عملية الضرب بهذه المثابة

(س + ح)

(س + ح)(س + ى) = س² + ح | س + ح ى
+ ى

(س + ح)(س + ى)(س + هـ) = س³ + ح | س² + ح ى | س + ح ى هـ
+ ى | + ح هـ
+ هـ | + ى هـ

(س + ح)(س + ى)(س + هـ)(س + و) = س⁴ + ح | س³ + ح ى | س² + ح ى هـ | س + ح ى هـ و
+ ى | + ح هـ | + ح ى و
+ هـ | + ى هـ | + ح هـ و
+ و | + ح و | + ى هـ و
+ ى و
+ هـ و

ومن الخواص الجزئية يشاهد فيها أن الحرف س يأخذ في ...

... بالابتداء من حد لا يوجد الذي أسه مساوي عدد ...

الى حد لا يوجد الذي أسه معدوم وان مكرر الحد الثاني يكون ... الحدود الثابتة من المكعبات ذات الحدين وان مكرر الحد الثالث يكون ... مجموع حواصل ضروب الحدود الثانية المذكورة مثنى وهكذا الى حد ...

[illegible] حاصل ضرب [illegible] المذكورة في بعضها

ويمكن جعل هذا القانون [illegible] بأن يقال [illegible] فرض أن هذا القانون مطرد

في [illegible] م ضرب كميات من ذوات الحدين عددها م (بجعل م رمزاً للعدد

[illegible] موجب) كان هذا القانون مطرداً ايضاً في حاصل ضرب كميات من ذوات

الحدين عددها م + ١

مثلاً [illegible] تكوين حاصل ضرب كميات من ذوات الحدين عددها م هكذا

س + [illegible] بالرمز [illegible] مجموع [illegible]

الثانية من الكميات ذات الحدين وبالرمز [illegible] مجموع

المختلفة المركبة من هذه الحدود الثانية المأخوذة مثنى وبالرمز [illegible] مجموع

حواصل ضربها ثلاث وهكذا ثم بالرمز ل لحاصل ضرب جميع هذه الحدود

الثانية ويفرض أن حاصل ضرب الكميات ذات الحدين هو

س + ل ١ س^١ + ل ٢ س^٢ + ل ٣ س^٣ + ... + ل م

فاذا ضربت هذه الكمية الكثيرة الحدود في كمية جديدة من ذوات الحدين

ه كمية س + ع تحصل من عملية الضرب هذا الحاصل

س^{م} + ل^{م}	س^{م-١} + ل^{م-١}	س^{م-٢} + ل^{م-٢}	+ ل^{م}	س
+ ح	+ ح ل	+ ح ل^{٢}	+ ح ل^{م-١}	+ ح ل^{م}

ومن هنا يعلم أن قانون الاسس المفروضة للمجهول س لم يتغير وأما قانون المكررات فانه يتبين أن مكرر الحد الاول يكون دائماً مساوياً للواحد ومكرر الحد الثانى مكوناً من مجموع الحدود الثانية لكيات من ذوات حدين عددها م + ١ ومكرر الحد الثالث مكوناً من مجموع حواصل ضرب مركبة من حدود الثانية لكيات من ذوات الحدين عددها م وماخوذة مثنى مضافاً اليها مجموع هذه الحدود الثانية مضروباً فى ٢ ومن ذلك يتكون مجموع حواصل ضرب مختلفة مركبة من الحدود الثانية لكيات من ذوات الحدين عددها م + ١ وماخوذة مثنى ومكرر الحد الرابع مكوناً من مجموع حواصل ضرب مركبة من الحدود الثانية لكيات من ذوات الحدين عددها م وماخوذة ثلاث مضافاً اليها مجموع حواصل ضرب مركبة من هذه الحدود الثانية ماخوذة مثنى ومضروبة فى ٣ ومن ذلك يتكون مجموع حواصل ضرب مختلفة مركبة من الحدود الثانية لكيات من ذوات الحدين عددها م + ١ وماخوذة ثلاث وهلم جرا وحينئذ يكون الحد الاخير مساوياً

لحاصل ضرب [illegible] ثانية لكميات [illegible] الحدين [illegible] مضروبًا

في ل وبناء على ذلك يكون هذا الحاصل كناية عن حاصل ضرب الحدود الثانية

لكميات من دوات الحدين عددها م + ١ ومن هنا يؤخذ انه اذا كان القانون

السابق محققًا لحاصل ضرب مضاريب عددها م كان مطردًا

لحاصل ضرب مضاريب عددها م + ١ وحيث انه محقق في حاصل ضرب

مضروبين فيكون مطردًا في حواصل ضرب جملة مضاريب

سند ١٨٧ فاذا فرض الآن أن كلًّا من الحدود الثانية للكميات ذات الحدين المضروبة

في بعضها مساوٍ للحد ح فان حاصل الضرب وهو

(س + ح)(س + ى)(س + هـ) ..... (س + ك) يؤول الى القوة اليمية للكمية س + ح

ويكون المكرر ح للحد الثاني من هذا الحاصل مساويًا للحد ح مكررًا بقدر

م الذي هو عدد المضاريب أعني م ح والمكرر ح للحد الثالث مساويًا

للحد ح² مكررًا بقدر عدد حواصل ضرب مختلفة مكونة من حروف عددها

م ومأخوذة مثنى أعني $\frac{م(م-١)}{١ \times ٢}$ ح² والمكرر ح للحد الرابع مساويًا

للحد ح³ مكررًا بقدر عدد حواصل ضرب مختلفة مكونة من حروف عددها

م ومأخوذة ثلاث أعني $\frac{م(م-١)(م-٢)}{١ \times ٢ \times ٣}$ ح³ وهلم جرا فاذًا يكون

[illegible]

$$(\text{س}+\text{ح})^{\text{م}} = \text{س}^{\text{م}} + \text{م}\,\text{س}^{\text{م}-1}\,\text{ح} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)}{(2\times1)}\,\text{ح}^{2}\,\text{س}^{\text{م}-2} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)}{(3\times2\times1)}\,\text{ح}^{3}\,\text{س}^{\text{م}-3} + \ldots\ldots + \text{ح}^{\text{م}}$$

بند ١٨٨ فاذا جعل $\text{ح}_{\text{ن}+1}$ رمزاً للحد الذي رتبته ن + ١ في الطرف الثاني من القانون المتقدم أعني رمزاً للحد المسبوق حدوداً عددها ن فانه يحدث

$$\text{ح}_{\text{ن}+1} = \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)\ldots\ldots(\text{م}-\text{ن}+1)}{(\text{ن}\times\ldots\ldots\times4\times3\times2\times1)}\,\text{ح}^{\text{ن}}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ن}}$$

وهذا مقدار هو المعروف بالحد العمومي لقوة الكمية (س + ح)^م لانه يمكن بواسطته استنتاج جميع الحدود بالابتداء من حد ثاني سترتيبه ويعوض في هذا المقدار على التوالي

ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩

مثلاً اذا اريد ايجاد الحد الخامس من قوة الثانية عشر للكمية س + ح نعوض بعد اجراء العمليات م = ١٢ ، ن = ٥ وحيث يكون م − ن + ١ = ٨ وبناء عليه يؤخذ من القانون المتقدم

$$\frac{12\times11\times10\times9}{(4\times3\times2\times1)}\,\text{ح}^{5}\,\text{س}^{8} = 495\,\text{ح}^{5}\,\text{س}^{8}$$ وهو الحد المطلوب

بند ١٨٩ ويؤخذ من تحليل الكمية (ح + س)^م انه يمكن تحصيل مكرر أي حد

بواسطة ضرب مكرر الحد السابق عليه في الاس الذي يوجد به المجهول س في هذا الحد السابق وقسمة حاصل الضرب على الاس الذي يوجد به ح في الحد المذكور بشرط أن يضاف الى هذا الاس واحد أو بقسمة المكرر المذكور على عدد الحدود السابقة على الحد المطلوب واما الأسس فانها تتغير عن اصلها بمعنى أن اس المجهول س يتناقص عن اصله واحداً فواحداً من حد الى تاليه واس ح يتزايد عن اصله واحداً فواحداً

ويكفي للبرهنة على هذا القانون بوجه عام ان يفرض انه يراد تحصيل الحد المسبوق بحدود عددها ن-١ وذلك بأن يغير الحد ن بالحد ن+١ في المقدار

$\text{ح}_{\text{ن}+1}$ فيحدث

$$\text{ح}_{\text{ن}+1} = \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)\ldots\ldots(\text{م}-\text{ن}+1)(\text{م}-\text{ن})}{1\times2\times3\times\ldots\ldots\times\text{ن}\times(\text{ن}+1)}\ \text{ح}^{\text{ن}+1}\ \text{س}^{\text{م}-\text{ن}-1}$$

وحينئذ يمكن بمقتضى منطوق القانون المذكور استنتاج الحد $\text{ح}_{\text{ن}+2}$ من الحد $\text{ح}_{\text{ن}+1}$ ويمكن بواسطة هذا القانون تكوين جميع حدود قوة الحكية $(\text{س}+\text{ح})^{\text{م}}$ بالابتداء من الحد الأول $\text{س}^{\text{م}}$ ومن هنا يعلم أن عملية التحليل تكون قد انتهت متى تحصل الحد $\text{ح}^{\text{م}}$ لان اس المجهول س الذي يلزم ان يضرب فيه الحد $\text{ح}^{\text{م}}$ ليتحصل من ذلك الحد التالي له ليس الا صفراً

وبهذه الكيفية يرى أن القوة السابعة للكمية س + ح هي

س^٧ + ٧ح س^٦ + ٢١ح^٢ س^٥ + ٣٥ح^٣ س^٤ + ٣٥ح^٤ س^٣ + ٢١ح^٥ س^٢ + ٧ح^٦ س + ح^٧ .

بند ١٩٠ يلزم أن تكون حدود تحليل الكمية (س + ح)^م التي على أبعاد متساوية من الحدين المتطرفين متحدة في المكررات

ولذا يقال أولاً كما تقدم أن الحد المسبوق بحدود عددها ر يكون

$$\text{ح}_{\text{ر}+1} = \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)\ldots(\text{م}-\text{ر}+1)}{1\times2\times3\times\ldots\times\text{ر}}\ \text{ح}^{\text{ر}}\ \text{س}^{\text{م}-\text{ر}}$$

وحيث أن تحليل الكمية (س + ح)^م مركب من حدود عددها م + ١ فيكون الحد الذي يتأخر عن حدود عددها ر مسبوقاً بحدود عددها [illegible]

إذا [illegible] م [illegible] ر [illegible]

تحصل

$$\text{ح}_{\text{م}-\text{ر}+1} = \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)\ldots(\text{ر}+1)}{1\times2\times3\ldots(\text{م}-\text{ر})}$$

ويمكن أن يفرض أن الحد ح_{ر+١} يكون [illegible]

أن ر يكون أصغر من م − ر وبمقتضى هذا [illegible]

هكذا

$$\frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)\ldots(\text{م}-\text{ر}+1)(\text{م}-\text{ر})\ldots(\text{ر}+1)}{1\times2\times3\ldots\times\text{ر}(\text{ر}+1)\ldots(\text{م}-\text{ر})}$$

ومن هنا يشاهد أن حدى هذا الكسر يشتملان على مضاريب هى الاعداد الصحيحة من ن + ١ الى م - ن فاذا حذفت المضاريب المشتركة كان مقدار المكرر $\frac{\text{م}}{\text{م}-\text{ن}+١}$ عين مقدار المكرر $\frac{\text{ن}}{\text{ن}+١}$

وثانياً أن مكرر الحد المسبوق بحدود عددها ن يكون كناية عن عدد حواصل ضرب مختلفة مركبة من حروف عددها م ومأخوذة نوناً نوناً ومكرر الحد المسبوق بحدود عددها م - ن كناية عن حواصل ضرب مختلفة الحروف عددها م ومأخوذة بمقدار م - ن لكن اذا كونت الحواصل المركبة من حروف عددها م نوناً نوناً تحصل من ذلك حواصل مركبة من الحروف التى عددها م المذكورة ومأخوذة بمقدار م - ن وذلك بأن يقسم بالتوالى حاصل ضرب هذه الحروف على كل من الحواصل المأخوذة نوناً نوناً وحينئذ يكون عدد حواصل الضرب المأخوذة بمقدار م - ن مساوياً لعدد الحواصل المأخوذة نوناً نوناً

وثالثاً اذا جعل ك رمزاً لمكرر الحد المسبوق بحدود عددها ن فان هذا الحد يكون كناية عن ك $\text{ن}^{\text{م}-\text{ن}}$ وحيث أن الكمية ذات الحدين س + ص لا تتغير بتغيير وضعى الحرفين س ، ص فلا يحصل تغير فى تحليل الكمية (س + ص)م

(س + ح)^م وحينئذ يكون تحليل هذه الكمية محتويًا مع الحد ك ح^م س^{م-م} على حد آخر لا يختلف عن ذلك الحد الا بكون الحرف ح وضع فيه بدل الحرف س، س بدل ح وهو بناء على ذلك كناية عن ك س^م ح^{م-م} المتبوع بحدود عددها م ومن البديهي بمقتضى قانون اسس المجهول س في تحليل الكمية (س+ح)^م أن الحد ك س^م ح^{م-م} يكون متبوعًا بحدود عددها م وحينئذ يكون مكرر الحد المتبوع بحروف عددها م عين مكرر الحد المسبوق بحدود عددها م

بند ١٩١ ولتحصيل تحليل الكمية (س-ح)^م يكفي ان يوضع -ح بدل ح في تحليل هذه الكمية فتكون الحدود الزوجية المرتبة التي يرى فيها ان ح مرفوع الى قوى فردية المرتبة مسبوق بالعلامة - والحدود الفردية المرتبة باقية على حالها وحينئذ يحدث

(س-ح)^م = س^م - م ح س^{م-١} + م(م-١)/(٢×١) ح^٢ س^{م-٢} - م(م-١)(م-٢)/(٣×٢×١) ح^٣ س^{م-٣} + ...

بند ١٩٢ واذا فرض في تحليل الكمية (س+ح)^م أن س = ح = ١ يحصل أن مجموع مكررات تحليل هذه [illegible] الحدين المتطرفين

فاذا فرض مثل ذلك فى تحليل الكمية $(س - ح)^{م}$ شوهد أن مجموع مكررات الحدود الفردية المرتبة يساوى مجموع مكررات الحدود الزوجية المرتبة

١٩٣ ويمكن لتحليل قوة أى كمية ذات حدين ان يبدأ بتحليل قوة درجتها أكبر درجة لهذه القوة مكررة $س + ح$ أو $س - ح$ ثم يستعوض الحرفان $س$ ، $ح$ بحدى الكمية ذات الحدين المفروضة وحينئذ يلزم لتحصيل تحليل الكمية $(٢س^{٣} - ٣ح^{٢}ص)^{٥}$ ان يبدأ بتحصيل تحليل الكمية $(س - ح)^{٥}$ وهو

$$س^{٥} - ٥ح س^{٤} + ١٠ح^{٢}س^{٣} - ١٠ح^{٣}س^{٢} + ٥ح^{٤}س - ح^{٥}$$

ثم بوضع $٢س^{٣}$ بدل $س$ ، $٣ح^{٢}ص$ بدل $ح$ فيحدث

$$(٢س^{٣} - ٣ح^{٢}ص)^{٥} = ٣٢س^{١٥} - ٢٤٠ح^{٢}ص س^{١٢} + ٧٢٠ح^{٤}ص^{٢}س^{٩} - ١٠٨٠ح^{٦}ص^{٣}س^{٦}$$
$$+ ٨١٠ح^{٨}ص^{٤}س^{٣} - ٢٤٣ح^{١٠}ص^{٥}$$

ويمكن وضع هذه العملية هكذا

	$\frac{٥}{١}$	$\frac{٤}{٢}$	$\frac{٣}{٣}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٥}$
١	٥	١٠	١٠	٥	١
$٣٢س^{١٥}$	$١٦س^{١٤}$	$٨س^{٩}$	$٤س^{٦}$	$٢س^{٣}$	١
١	$٣ح^{٢}ص$	$٩ح^{٤}ص$	$٢٧ح^{٦}ص$	$٨١ح^{٨}ص$	$٢٤٣ح^{١٠}ص^{٥}$

$$٣٢س^{١٥} - ٢٤٠ح^{٢}ص س^{١٢} + ٧٢٠ح^{٤}ص^{٢}س^{٩} - ١٠٨٠ح^{٦}ص^{٣}س^{٦} + ٨١٠ح^{٨}ص^{٤}س^{٣} - ٢٤٣ح^{١٠}ص^{٥}$$

فأما الصنف الاول فهو مكون من جملة كسور بسوطها اعداد صحيحة آخذة

فى التناقص

[illegible]

لمقدارين التخيليين ل + ى √(-١) و ل - ى √(-١) ونوحظ ما تقرر في

بشأن قوى √(-١) تحصل القانونان

$$(\text{ل} + \text{ى}\sqrt{-1})^{\text{م}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{ل}^{\text{م}} - \frac{\text{م}(\text{م}-1)}{2\times1}\text{ل}^{\text{م}-2}\text{ى}^2 + \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)(\text{م}-3)}{4\times3\times2\times1}\text{ل}^{\text{م}-4}\text{ى}^4 + \text{ى}\text{ن} \\ + \left[\text{م}\,\text{ل}^{\text{م}-1} - \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)}{3\times2\times1}\text{ل}^{\text{م}-3}\text{ى}^2 + \text{ى}\text{ج}\right]\text{ى}\sqrt{-1} \end{array} \right.$$ و

$$(\text{ل} - \text{ى}\sqrt{-1})^{\text{م}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{ل}^{\text{م}} - \frac{\text{م}(\text{م}-1)}{2\times1}\text{ل}^{\text{م}-2}\text{ى}^2 + \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)(\text{م}-3)}{4\times3\times2\times1}\text{ل}^{\text{م}-4}\text{ى}^4 - \text{ى}\text{ن} \\ - \left[\text{م}\,\text{ل}^{\text{م}-1} - \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)}{3\times2\times1}\text{ل}^{\text{م}-3}\text{ى}^2 + \text{ى}\text{ج}\right]\text{ى}\sqrt{-1} \end{array} \right.$$

في استخراج جذور الكميات الكثيرة الحدود

١٩٥ قد شوهد في علم الحساب أن كيفية تركيب مربع مجموع عددين ومكعبه تُوصِّل الى القواعد المتعلقة باستخراج كل من الجذر التربيعي والتكعيبي للاعداد ويمكن أن تكون معرفة الحدين الاولين $\text{س}^{\text{م}} + \text{م}\,\text{ح}\,\text{س}^{\text{م}-1}$ من تحليل الكمية $(\text{س} + \text{ح})^{\text{م}}$ معدة لتكوين الطرق التي ينبغي اتباعها في استخراج جذور الاعداد على أي وجه كانت درجتها وبذلك يتوصل الى قواعد مشابهة للقواعد التي تستعمل في استخراج كل من الجذر التربيعي والتكعيبي ولما كانت هذه القواعد نادرة الاستعمال وجب علينا هنا ان نعرض عن ذكرها ونتصدى لذكر استخراج جذور الكميات الحرفية

[illegible] لكنه يلزم قبل الشروع في [illegible] بنا لابد يسهرت و [illegible]

بها يحصل اى بمذر تكعيبية كثيرة الحدود [illegible]

فاذا اريد استخراج الجذر التكعيبي لكمية كثيرة الحدود ذات تكعيبية

[illegible] س - ٣٦ ح س + ٦٦ ح٢ س - ٦٣ ح٣ س + ٣٣ ح٤ س - ٩ ح٥ س + ح٦

يقال حيث ان الكمية الكثيرة الحدود المرتبة حسب تدرجات متنازلة

للحرف س [illegible] مضاعفات [illegible] و الجذر [illegible]

يؤخذ من ذلك [illegible] من تناسب لدرجات المتنازلة للحرف

س كان الاول من هذه [illegible] حدود كاملة عن مكعب حد [illegible]

من الجذر وحينئذ يلزم [illegible] من الجذر ان يوجد حد تكعيبي

الاول ٨ س وهو [illegible]

فاذا جعل ل رمزا لجميع [illegible] الاول ورمز لكمية

الكثيرة الحدود المعروضة [illegible]

ع = ل س + ل٣ = [illegible]

وبناء على ذلك يكون

ع - ٨ س = - ٣٦ ح س + ٦٦ ح٢ س + ع = ل (١٢ س + ٦ ح س + ل٢ س)

وهذه [illegible]

كناية عن خاصية [illegible]

في ٣×ش لانه [illegible] المجهول [illegible] الكمية ل [illegible]

[illegible] ش×ل [illegible] اقل من [illegible] ومن هنا يؤخذ انه اذا قسم [illegible]

[illegible] ش على ثلاثة [illegible] الحد الاول من الجذر [illegible]

[illegible]

[illegible] النظر عن الحدين الاول [illegible]

[illegible]

ع = (ش - ٣حس + ل)^٣ = (ش [illegible] ٣(ش - ٣حس)^٢ ل [illegible]

(ش - ٣حس) ل^٢ × ل^٣

ومن هنا ينتج

ع - (ش - ٣حس)^٣ = ل × [٣(ش - ٣حس)^٢ + ٣(ش - ٣حس) [illegible]

وهذه المساوية يؤخذ منها انه اذا طرح من الكمية الكثيرة [illegible]

الجزء ش - ٣حس من الجذر [illegible] الحد الاول من [illegible]

ضرب الحد الاول من الكمية ل في ٣×[illegible] ثلاثة [illegible]

[illegible] حيث أن [illegible] لا تحتوي [illegible]

[illegible] من الباقي على [illegible] خص الحد الثالث من [illegible]

[illegible] من الباقي الاول ثلاثة

[illegible] مضروبا في [illegible] مضافا اليه ثلاثة امثال

[illegible] مربع الحد [illegible] مضافا اليه مكعب الحد

[illegible] مربع الحد [illegible]

[illegible] مركب من المضروبين [illegible]

[illegible] يضرب المجموع في الحد [illegible]

[illegible] الثاني وهو

[illegible]

[illegible] الحد الاول من هذا الباقي على [illegible]

[illegible] من الجذر

[illegible]

[illegible] مضروب مربع [illegible]

[illegible] في مربع [illegible]

[illegible] حساب الاجزاء الثلاثة

الاخيرة أن يضاف الى ثلاثة امثال المربع ، ش - ٣ ح س حاصل الضرب المركب من ثلاثة امثال ، ش - ٣ ح س ى + ح² ومربع + ح² ويضرب هذا الحاصل فى + ح² وطرحه من الباقى الثانى يكون الباقى صفراً وحينئذ يكون ، ش - ٣ ح س + ح² هو الجذر التكعيبى للكمية الكبيرة المحدودة المفروضة

[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]

[illegible] الكيفية التي بها يمكن تحصيل جزء [illegible] الكمية [illegible]

كالكمية [illegible]

حيث أن الكمية الكثيرة الحدود ح كناية عن حاصل ضرب مركب من [illegible]

مساوية للجذر المطلوب عددها م فاذا كانت هذه الكمية [illegible]

كلا هما مرتب بحسب الدرجات التنازلية للحرف س فان [illegible] الأول

من الكمية ح يكون كناية عن حاصل ضرب مركب من مضاريب عددها م

كل منها مساو للحد الأول من الجذر وبناء على ذلك يكون الحد الأول من الجذر

هو الجذر النمي للحد الاول من الكمية الكثيرة الحدود ح

ولاجتناب التكرار يعوض انه قد تحصل جملة من حدود الجذر [illegible]

غير معرفة الكيفية التي تستعمل لتحصيل الحد التالي للحد المذكور ولذا

يجعل ح رمزاً لمجموع الحدود المتحصلة و ى رمزاً للباقي حدود الجذر يكون

ح = (ى + ى)^م ومن هنا يحدث بجعل ر رمزاً للباقي ر = ح^م

ر = ح^م = م ح^(م-١) ى + م(م-١)/(١×٢) ح^(م-٢) ى^٢ + الخ

فاذا جعل ل رمزاً للحد الاول من الجذر و ى رمزاً للحد [illegible] المحتوي

على اعظم أس للمتغير س أعني للحد الذي يراد أن يبحث عنه الآن

[illegible]

كان [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

الجذر الميمي لحدها الاول فيحصل الحد الاول من جذرها ثم يقسم حدها الثاني على القوة التي درجتها (م-١) للحد الاول من الجذر مضروبة في م فيحصل الحد الثاني من هذا الجذر ثم تطرح من الكمية الكثيرة الحدود في القوة الميمية لمجموع هذين الجذرين المتحصلين ويقسم الحد الاول من الباقي على القوة التي درجتها (م-١) للحد الاول من الجذر مضروبة في م فيحصل الحد الثالث من هذا الجذر وهلم جرا

ويشاهد بالسهولة اذا كانت الكمية الكثيرة الحدود المفروضة قوة ميمية صحيحة ان هذه العمليات توصل الى باقي معدوم وكذلك اذا كانت هذه العمليات توصل الى باقي معدوم فان الكمية الكثيرة الحدود المفروضة تكون قوة ميمية صحيحة ويكون مجموع الحدود المتحصلة بهذه المثابة هو الجذر المطلوب للكثيرة الحدود المفروضة

ويشاهد ايضاً بمقتضى براهين مشابهة للبراهين المقررة في شأن الجذر التربيعي (٥٩ ش) انه اذا كانت الكمية الكثيرة الحدود المفروضة مرتبة بحسب الدرجات التنازلية للحرف الاصلي فلا شك أن العملية تكون غير منتهية متى كان الجذر محتوياً على حد مشتمل على الحرف المذكور بأس

اذا ضرب

ضرب في عدد م كان حاصل ضربه في عدد صغر من هذا

حرف في حد لأخير من كثيرة حدود

وإذا كانت كثيرة الحدود مفروضة مرتبة بحسب الدرجات متصاعدة

بحرف الأول فإن العملية تكون غير متناهية متى كان الجذر

محسوبًا على حد مشتمل على الحرف المذكور بأس ذ ضرب في عدد م كان

حاصل ضربه في هذا العدد أكبر في الحد الأخير من كثيرة الحدود

وإذا كانت الكثيرة الكثيرة الحدود المفروضة لا تحتوي على حرف ورقي

فإن العملية تكون بعينها غير متناهية إذا كان الحد الأول من الباقي

المتحصل لا يقبل القسمة على القوة التي درجتها أم من الحد الأول من الجذر

مضروبة في م

وإذا لم يكن الحد الأول من كثيرة الحدود المفروضة ذو درجة درجتها

فلا يمكن بيان الجذر الجبري لكثيرة الحدود هذه بكيفية منفقة لكن يمكن

هنا استعمال طريقة المعادلة بأن يبين الجذر الجبري للحد الأول بوضعه

تحت العلامة √ أو بواسطة الأسس الكسرية

ويمكن أيضًا ضرب كثيرة الحدود في مضروب كالمضروب حيث يؤول

[illegible] الى قوة صحيحة [illegible] كثيرة الحدود المتحصلة من عملية الضرب

. جذر يسمى كالجذر ٤ كان الجذر المسمى كثيرة الحدود المفروضة $\frac{\text{ح}}{\text{ا}}$

فى الاعداد المشكلة أى التى على صورة الاشكال الهندسية
وفى معرفة الاكوام المنتظمة من الكلل

سنة ١٩٨ يوجد بين مكررات قوتين متواليتين للكمية س + ح ارتباطات تستنبط منها عدة قواعد لا بأس بمعرفتها

مثلاً اذا فرض أن القوة المسمية للكمية س + ح هى

$$\text{س} + \text{ج ح س}^{-1} + \text{ء ح}^{2}\text{ س}^{-2} + \text{هـ ح}^{3}\text{ س}^{-3} + \text{الخ}$$

وضربت هذه الكمية الكثيرة الحدود فى س + ح كان حاصل الضرب هو

$$\text{س}^{1+\text{م}} + \text{ج ح س}^{\text{م}} + \text{ء ح}^{2}\text{ س}^{\text{م}-1} + \text{هـ ح}^{3}\text{ س}^{\text{م}-2} + \ldots\ldots\ldots \text{ الخ}$$

$$\text{ح س}^{\text{م}} + \text{ج ح}^{2}\text{ س}^{\text{م}-1} + \text{ء ح}^{3}\text{ س}^{\text{م}-2} + \ldots\ldots\ldots \text{ الخ}$$

ومن هنا يؤخذ أنه يكفى لتحصيل أى حد من القوة التى درجتها (م + ١) للكمية س + ح أن يضاف الى مكرر الحد الذى من مرتبته فى القوة المسمية مكرر الحد السابق عليه

وبمقتضى هذه القاعدة يمكن تكوين مكررات نعوى لمنوايه سمنية
س + ح كما فى هذا الجدول

١ ، ١ ، ١ ، ١ ، ١ ، ١ ، ١ ، ١ ، ١ ، ١ ، ...

١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ...

١ ، ٣ ، ٦ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢١ ، ٢٨ ، ...

١ ، ٤ ، ١٠ ، ٢٠ ، ...

١ ، ٥ ، ١٥ ، ٣٥ ، ٧٠ ، ...

١ ، ٦ ، ٢١ ، ٥٦ ، ...

١ ، ٧ ، ٢٨ ، ...

فأما الصف الاول الرأسى من هذا الجدول فهو مكر [illegible]

واما الثانى فهو مكون من العـــدد ١ مكررا [illegible]

الثالث فانه يحدث بهذه الكيفية وهى [illegible]

الثانى العدد الحادث من اضافة الحد الذى فوقه [illegible]

من الصف الثالث يكون ١+٠ أى ١ وحده الثانى ١+١ أى ٢ وحده الثالث ٠+١ أى ١ وأما الصف الرابع فانه يتكون من الثالث كما أن الثالث تكون من الثانى وهلم جرا وحيث أن الحدين الاولين من الصف الثانى يمكن اعتبارهما كمكررى القوة الاولى للكمية س+ص فتستنبط من ذلك القاعدة المتقدمة وهى أن حدود الصف الثالث تكون مكررات لتحليل الكمية (س+ص)^٢ ومكررات الصف الرابع تكون مكررات لتحليل الكمية (س+ص)^٣ وهكذا

ويطلق على هذا الجدول الذى يمكن تطويله الى غير نهاية اسم المثلث الحسابى للعلم باسكال

بيد وبمقتضى تركيب المثلث الحسابى يشاهد بالسهولة أن الحد الذى مرتبته ع من أى صف أفقى هو عبارة عن مجموع الحدود الاول التى عددها ع من الصف الافقى السابق عليه لانه اذا لوحظ الحد ٥٦ وهو الحد السادس من الصف الرابع يشهد أنه مكون من ضم العددين ٢١ , ٣٥ الى بعضهما وهذان العددان يوجدان على يمين الحد المذكور فى الصف الثالث والرابع والثانى من العددين المذكورين وهو ٣٥ هو مجموع الحدين

٢٠,١٥

٥ ، ١٠ والأخير من هذين الحدين وهو ٢٠ مكون من ١٠ ، ١٠ والعدد الأخير من هذين العددين وهو ١٠ هو مجموع ٦ ، ٤ ، ٤ ، ١ هو مجموع العددين ٣ ، ١ وحينئذ يكون ٥٦ = ١ + ١٥ + ١٠ + ٦ + ٣ + ١

بند ١٩٧ القاعدة المتقدمة (في بند ١٩٨) المستعملة اساسا لتكوين المثلث الحسابي والخاصية المذكورة في البند السابق يمكن استنباطهما بالسهولة من نظرية التوافيق لانه قد شوهد أن مكرر الحد الذي درجته (ح + ١) من القوة التي درجتها (م + ١) للكمية س + ص يساوي عدد توافيق قدرها م + ١ من الحروف التي كل حاصل ضرب مكون منها مشتمل على حروف عددها ح وحيث أن هذه التوافيق تعتبر مركبة من جزئين أحدهما التوافيق التي لا تحتوي على واحد من الحروف كالحرف ص مثلا وعددها عين عدد التوافيق م المركبة من الحروف التي كل واحد من حواصل ضربها مشتمل على حروف عددها ح وثانيهما التوافيق المحتوية على الحرف ص التي عددها عين عدد التوافيق م المركبة من الحروف التي كل واحد من حواصل ضربها مشتمل على حروف عددها ح - ١ فيتحصل بملاحظة ما تقدم في (بند ١٨٢)

(ن + ع) = م + (م)ن ..... (١)

وهذه متساوية ببرهن بها على القاعدة المتقدمة (ف ١٩٨)

ويلزم ببرهنة سطرية التوافيق على أن الحد الذي رتبته ع من صف توافيق من المثلث الحسابي يكون مساويًا لمجموع الحدود الأولى في عددها ع من الصف الافقي السابق عليه ان ينبه على أن الحد الاول من الصف الافقي الذي رتبته (ن + ١) من المثلث الحسابي يكون موجودًا في الصف الرأسي الذي رتبته (ن + ١) ومن هنا يؤخذ ان الحد الذي رتبته ع من الصف الافقي الذي رتبته (ن + ع) يكون موجودًا في الصف الرأسي الذي رتبته (ن + ع) غير أنه يكون واحدًا من مكررات تحليل الكمية (س + ص)^{ن+ع-١} وحينئذ يكون مكررًا للحد الذي رتبته (ن + ١) من هذا التحليل لانه يشغل في الصف الافقي المرتبة (ن + ١) وبناء على ذلك يكون هذا الحد كناية عن عدد التوافيق ن + ع - ١ المركبة من حروف التي كل واحد من حواصل ضربها مشتمل على حروف عددها ن أو (ن + ع - ١)/ع

اذا تقرر هذا ووضع في القانون (١) ن + ع - ١ بدل م نحصل من ذلك القانون

= (ن + ع - ١)/ع

ثالثة تسمى الاعداد الهرمية المثلثية وسيأتى بيان هذه التسمية

ومقتضى ما ذكر يكون مجموع الاعداد المتكلة الأول التى عددها ج

ومبينها ج مساويا لعدد مثلثى رتبته ج ومرتبته ج + ١ وهذا العدد

هو ن ج المتحصل من القانون المتقدم (فى ص ١٨٥) فى شأن عدد التوافيق

التى كل واحد من حواصل ضربها مشتمل على حروف عددها ج بالنسبة للحروف

التى عددها م فاذا وضع فى هذا القانون ج + ٢ بدل ج + ١ بدل م تحصل

$$\frac{ج(ج+١)(ج+٢)\ldots\ldots(ج+ج)}{١\times٢\times٣\ldots\ldots(ج+٢)}\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

ويلزم لتحصيل مجموع الاعداد الأول المعتادة ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، ج ان يجعل

ج = ١ فى القانون (٢) فيكون $\frac{ج(ج+١)}{٢}$ هو المجموع المطلوب وهذا موافق

لما تقدم فى المتواليات العددية

٣٣٣ واكوام الكل مركبة من جملة صفوف افقية مكيفية الوضع بحيث تكون

كل كل صف موجودة فوق اخلية كل الصف التالى له من الجهة السفلى وجميع

الكلل متماسة وعدة فى العيار

وفى الكوم مثلثى بنى على صورة هرم مثلثى قاعدته مثلث متساوى الأضلاع

يكون كل صف مكونا من جملة قطارات من الكلل بحيث يرى عند الابتداء من

[illegible] والثاني على كلتين والثالث على ثلاث [illegible]
التي وضعت بها القطارات ومن كيفية وضع تصنيف لافتية بالنسبة الى
بعضها ان اعداد الكلل التي توجد في الصموت مختلفة هي [illegible]

[illegible]

وهذه الاعداد هي المكونة لنصف الثالث من الثلاث [illegible] وهي الاعداد [illegible]
وتأتي ذلك [illegible] من عدد كل حد صلع [illegible]
كل الكوه وهو

[illegible]

يجعل [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] واحدها على كل عددها

[illegible] من صفة [illegible] ن - ١ وه [illegible] طلب

تحقيقه [illegible] مشتق من [illegible] على كل عددها ن أو على

عدد مثلثي رتبته ن هو $\frac{ن(ن+١)}{٢}$ وهذا المقدار اذا وضع فيه ن - ١

بدل ن تحصل $\frac{(ن-١)ن}{٢}$ ولا يخفى ان مجموع هذين المقدارين يساوى ن^{٢}

وبهذه الصورة يؤيد ان المجموع المتقدم ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + ن يساوى

المجموع لكون من حدوداً عددها ن تتركب منها متسلسلة الاعداد المثلثية

مضافاً اليه المجموع المكون من حدود أولها عددها ن - ١ تتركب منها هذه المتسلسلة

وحيث تقدم أن المجموع المكون من الاعداد الاولى التى عددها ن يساوى $\frac{ن(ن+١)(ن+٢)}{١ \times ٢ \times ٣}$

فاذا وضع فى هذا المقدار ن - ١ بدل ن تحصل $\frac{(ن-١)ن(ن+١)}{١ \times ٢ \times ٣}$ واذا

اضيف هذان المقداران الى بعضهما تحصل عدد كل الكوم المربعى وهو

$$\frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{١ \times ٢ \times ٣} \quad .....(٤)$$

والكوم

والكل مستطيل هذا الذي يكون قاعدته مستقيمة ويكون منتهيا نقطة من
الكل ويكون [illegible] كناية عن عدد كل [illegible] متتابع الموضوع
تحت [illegible]
بحيث [illegible] وعدد من متتابع [illegible]
له مساويا [illegible] من [illegible]
مساويا [illegible] فاعدد كل [illegible]
يكون [illegible]

[illegible]

وهذا المجموع يكون [illegible]
[illegible] + ٣ + ... + [illegible] [illegible]
والثاني بالعدد [illegible] [illegible] مقتضى [illegible]
هذان الكسران [illegible] [illegible]

[illegible]

ويمكن معرفة مقدار [illegible] موجودة في كل [illegible] صورة هرم [illegible]
اعرف [illegible] في كل من [illegible] صورة هرمين [illegible]

[illegible] الاعداد المكونة للمثلث الحسابي
[illegible] ايضا [illegible] متسلسلات
[illegible] الاعداد معتادة المعروفة بالاعداد
[illegible] الاعداد [illegible] من جمع عدة حدود متوالية من متسلسلة
[illegible] واحد وبالجملة فنظرية هذه الاعداد
[illegible] لانسان ليها [illegible]

[illegible]

[illegible] في نظرية القسم المشترك الاعظم
والى [illegible] على بقية اصولها الاولية

[illegible] التجزئات الجبرية المنطقة التي لا تحتوي
على [illegible] تكون صحيحة أو غير قابلة للقسمة على آخر
بحسب ما يكون [illegible] الكية الاولى على الثانية كية صحيحة أو غير صحيحة
وكل الصحيحة التي لا تقبل القسمة الا على نفسها أو على الواحد تسمى كية أولية
مثل الكية ذات الحدين [illegible] أولية وكذلك الكية ذات الحدود الثلاثة

ش - ر ـ لان هذه الاخيرة لما كانت مساوية لكمية ر س - ج ٢ + ج ٣ كانت لا تقبل القسمة الا على نفسها ويقال للكميتين أو للكميات معًا اذا كان لا يوجد لها كمية صحيحة تقسم كل واحدة منها قسمة بلا باق غير الواحد مثلاً

الكميتان ٢ - ٢ س ج ٢ - ٩ ج ٢ و ٣ - ٣ س ج ٢ + ٣ ج ٢ معًا لان الكمية الاولى لا تقبل القسمة الا على ٢ - ٢ س ج + ج ٢ والثانية لا تقبل القسمة الا على ٣ - ٣ س ج + ج ٢

ونظريات الكميات الجبرية الاولية مماثلة لنظريات الاعداد الاولية التي سبق بيانها ولنتعدى ذكرها لنقول

النظرية الاولى

يمكن كل كمية أولية ع تقسم حاصل ضرب كميتين ح و د الأوليتين معًا تقسم واحدة منهما

وقد سبق برهان هذه النظرية في الجملة التي كانت بها كميتين ح و د و ع ر تقسم عدد ر ب ع فاذا فرض أن هذه الكميات لا تحتوي على غير حرف ع يؤخذ من ذلك اربع حالات نذكرها على الترتيب فنقول

[illegible]

وكانت [illegible] الكمية [illegible] الاعداد

يعرض أن

[illegible]

بجعل [illegible] من اعداد صحيحة فاذا ضربت الكمية ج

في الكمية [illegible]

[illegible]

وحيث أن [illegible] يقبل القسمة على العدد ج فيلزم أن هذا

العدد يقسم [illegible] وبناء على ذلك اذا كان العدد

الأول [illegible] من الاعداد [illegible]

فاذا قسم جميع هذه [illegible] الكمية الكبيرة [illegible]

يلزم أن [illegible]

[illegible]

اذا كانت الكميتان ج ، د محتويتين على الحرف س وكانت الكمية ج مبينة

بعدد يفرض أن العدد و لا ينقسم كلتا الكميتين ج ، د فاذا جعل ج

رمزا

[illegible] ج″ رمزنا لحدود الاخرى كان ح = ج + ج″ وضربت الكمية ب بعده

الكمية وكان ب = ب′ + ب″ حدث

ح ب = (ج′ + ج″)(ب′ + ب″) = ج′ ب′ + ج′ ب″ + ج″ ب′ + ج″ ب″

وحيث أن حدود ثلاثة الاول من هذا الحاصل تقبل القسمة على الكمية ع التي تقسم بمقتضى مصروف الفرض الحاصل ح ب فيلزم انها تقسم ج″ ب″

ومن هنا يؤخذ انها تقسم جميع حدود ج″ ب″ فاذا فرض أن ح س و ح ص كناية عن حدود الكميتين ج″ و ب″ اللتين يدخل فيهما س بأعلى أس وأن الحد ح س ص داخل في الحاصل ج″ ب″ حيث لا يمكن اختصاره مع أي حد من هذا الحاصل فانه يكون غير قابل للقسمة على الكمية ع لان هذه الكمية لا تقسم بمقتضى الفرض كلتا الكميتين ح و ب وحينئذ لا يمكن ان الكمية ع تقسم الحاصل ح ب بدون أن تقسم كلا من صبيه ح و ب

الخاصية الثالثة

اذا كانت الكمية ح محتوية على الحرف س والكمية ب مبينة بعدد وليكن

[illegible]

[illegible]

[illegible]

وحيث ان الطرف الاول من هذه المساوية يقبل القسمة على كمية ر فلازم
يكون حاصل ضرب ج ء قابلا للقسمة على هذه كمية ولكن حيث ان
ج كمية اولية محتوية على س فلا تكون قابلة للقسمة على عدد وحينئذ
يكون ك قابلا للقسمة على ر وان لم يكن كذلك كان حاصل الضرب
ج ك غير قابل للقسمة على ر (كما في الحالة الثانية) فاذا جعل كَ رمزا
لخارج قسمة ك على ر فانه يحصل

ج ر ر كَ = ج ك

ويمكن البرهنة بمثل ذلك على ان كَ يقبل القسمة على ر لانه اذا جعل
كً رمزا لخارج القسمة تحصل

ج ر كَ = ج كً

ويتوالى العمل الى ان يكون الطرف الاول محتويا على ج يتوصل الى المتساوية
= ج

[illegible]

وزيادة على ذلك يكون جَ دالاً على كمية صحيحة لان م جَ ، ع لـ كميتان صحيحتان فاذا ضرب طرفا المتساوية المذكورة فى ء ثم قسما على ع حصل

$$م \frac{جَ لـ}{ع} = ء لـ + \frac{جَ ء}{ع}$$

ومن هذه المتساوية الأخيرة يؤخذ ان الكمية ع التى تقسم الحاصل جَ ء تقسم ايضاً الحاصل جَ ء .

واذا فرض أن جَ كمية جبرية وقسمت الكمية ع على الكمية جَ فانه يتوصل الى باقى درجته دون درجة جَ ويجعل مَ رمزاً للعدد الذى يلزم ضرب هذا الخارج فيه لاجل حذف ما به من المقامات و لـَ رمزاً للكمية الكثيرة الحدود الصحيحة الحادثة من عملية الضرب و جَّ رمزاً للحاصل الحادث من ضرب مَ فى باقى القسمة ايضاً يحصل

$$مَ ع = جَ لـَ + جَّ$$

ولا ينعدم جَّ لانه لو انعدم للزم ان يكون مَ ع قابلاً للقسمة على كل مقروجبرى أولى من مضاريبه جَ وهذا محال وزيادة على ذلك يكون جَّ دالاً على كمية صحيحة لان مَ ع و جَ لـَ كميتان صحيحتان فاذا ضرب طرفا المتساوية الأخيرة فى ء ثم قسما على ع حصل

$$مَ ء = \frac{جَ لـَ ء}{ع} + \frac{جَّ ء}{ع}$$

ويؤخذ

ويؤخذ من هذه المساوية أن الكمية ج التي تقسم حاصل جَ ، تقسم أيضاً الحاصل جَ،

واذا كانت الكمية جَ جبرية أيضاً فانه يلزم أن تقسم عليها الكمية ج ويحدث من ذلك متساوية جديدة مشابهة للمتساويتين المتقدمتين هي

م″ ج = جَ ك″ + جَ″ التي يؤخذ منها م″، = $\frac{جَ ك″}{ج}$ + $\frac{جَ″}{ج}$

وهذه المتساوية الأخيرة يؤخذ منها أن الكمية ج التي تقسم حاصل جَ، تقسم أيضاً الحاصل جَ″،

ويتوالى العمل هكذا بدون [illegible] بالضرورة الى باقي عددي كالسابق [illegible] لانه لا يمكن مباشرة تحصيل باقي عدد [illegible] الباقي المتحصل بالنسبة [illegible] يحصل من الترجمة [illegible] وحاصل الضرب جَ [illegible] ج ويؤخذ من ذلك أن الكمية ج [illegible]

فاذا كانت [illegible] ج [illegible] ذلك بالمشابهة [illegible]

[illegible] كاجزاء [illegible] يتولد من ذلك ربع [illegible]

[illegible]

[illegible]

سبحه

سعر بالمقدمة ببرهن بطريق سهولة على أن الجذر الأى درجة نكية صحيحة لا يمكن أن يكون نكية كسرية وهذه البرهنة لا تختلف عن مقدمة فى شأن الاعداد الصحيحة (١٢٩)

فى القاسم المشترك الأعظم بين عدة كميات جبرية صحيحة

١٢٨ يطلق اسم القاسم المشترك الأعظم بين عدة كميات جبرية صحيحة على حاصل ضرب جميع العوامل الأولية العددية أو الحرفية المشتركة بين هذه الكميات

١٢٩ ويؤخذ من هذا التعريف أن القاسم المشترك الأعظم بين عدة حدود يتحصل بهذه الكيفية وهى أنه يبحث عن القاسم المشترك الأعظم بين مكوراتها العددية ويكتب عقب هذا العدد كل حرف مشترك بين جميع الحدود بأصغر أس له وحينئذ يلزم لايجاد القاسم المشترك الاعظم بين الحدود ٤٣٢ خ ٢ ش ٥ ، ٧٠ خ ٣ ش ٥ ، ٩٠ خ ٢ ش ٣ أن يبحث فى مبدأ الأمر عن القاسم المشترك الاعظم بين الاعداد ٤٣٢ ، ٧٠ ، ٩٠ وحيث أنه ١٨ فيكون القاسم المشترك الأعظم بين الحدود المفروضة هو

١٨ خ ٢ ش

[illegible]

[illegible]

[illegible]

بين هذين الحدين هو س ش فاذا قسمت الكمية م على س ش والكمية ء على س ش نحصل الخارجان صحيحين

$$\text{ح} = -٤\text{س}^٢\text{ش} + ١٤\text{س ش}^٢ - ١٢\text{ش}^٣ - ١٤\text{س}^٢\text{ص} + ١٤\text{س ص}$$

$$\text{ء} = -\text{س}^٢\text{ش} + \text{س ش}^٢ + ٢\text{ش}^٣ + \text{س}^٢ - ٢\text{س}$$

وحينئذ يكون القاسم المشترك الأعظم بين الكميتين م , ح الكثيرتي الحدود مساويًا القاسم المشترك الاعظم بين الكميتين ح , ء مضروبًا في س ش

ولنبحث الآن عن الكيفية التي يلزم سلوكها في تعيين القاسم المشترك الاعظم بين الكميتين ح , ء الصحيحتين كثيرتي الحدود غير المحتويتين على مضارب مشتركة فنفرض أن هاتين الكميتين تكونان مرتبتين بالنسبة للحرف س وأن درجة الكمية ء لا تزيد عن درجة الكمية ح فان كانت الكمية ء تقسم الكمية ح قسمة صحيحة فانها تكون هي القاسم المشترك الاعظم المطلوب فاذا قسمت الكمية ح على الكمية ء

وفرض أن القسمة غير صحيحة وتحصل من ذلك خارج قسمة صحيح كالخارج ك وباق كالباقي ق ودرجته اقل من درجة الكمية ء بالنسبة الى س تحصلت من ذلك المتساوية

ح = ء ك + ق

[illegible]

[illegible]

[illegible]

وهذا لا يتأتى [illegible] في أغلب الأحوال [illegible]

درجته أقل من [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

تعيين [illegible] المقسوم

ه من مضاريب الكمية ا

وذا كانت الكميتان ج ، ا الكثيرتا الحدود محتويتين على حرف واحد كالحرف س فانه مكررات قوى هذا الحرف تكون أولية مع ما فى كل كمية كثيرة الحدود لانه قد فرض انه حذف من كلتاهما بين الكميتين سائر مضاريب الحدود وينتج من ذلك ان القاسم المشترك الأعظم بين الكميتين ج ، ا الكثيرتى الحدود وهو حاصل ضرب المضاريب الأولية المشتركة بين الكميتين لا يتغير اذا ضرب المقسوم ج فى مكرر الحد الأول من الكمية ا أو فى أى مضروب لهذا المكرر وبهذه الكيفية تجرى عملية القسمة الأولى الجزئية بلا كسور وباجراء عملية مشابهة للمتقدمة فى اثناء قسمة ج على ا يتحصل مقسوم جزئى لا يكون فيه مكرر الطرف الأول قابلا للقسمة على مكرر الحد الاول من المقسوم عليه وبتوالى العمل هكذا الى ان يتوصل الى باق كالباقى ق تكون درجته دون درجة الكمية ا يلزم لايجاد القاسم المشترك الأعظم بين الكميتين ج ، ا الكثيرتى الحدود ان تقسم الكمية ا على الكمية ق بشرط ان يحذف ما يوجد من المضاريب المشتركة بين حدود الكمية الباقية ق حيث انه لا يوجد مثلها فى الكمية ا وباجراء هذه العمليات على درجات

البواقى

[illegible] على حرف س [illegible]

[illegible] هو قاسم مشترك [illegible]

الكثيرين [illegible] الكثيرين محدود [illegible] لما في غير معدوم ولا يكون

للكثيرين [illegible] الكثيرين محدود [illegible] لان [illegible] مشترك

بين هاتين الكثيرين الكثيرين محدود [illegible] لما في الأخير وجب لا يكون [illegible]

لأنه غير مشترك على حرف س [illegible] وهذا محال لان الكثيرين [illegible]

ليس لهما بالمرتبة مؤثرات [illegible]

وهاك مثالا على ذلك هو

[illegible] س ١٠٠ س^٣ + ٥ س ٨

[illegible] س^٤ + ٦ س^٣ + ٤ س^٢ + ١٢ س + ٦

[illegible]

[illegible] س^٤ + ٦ س^٣ + ٤ س^٢ + ١٢ س + ٦

[illegible] ٣ س^٣ + ١٤ س^٢ + ١٨ س + ١٢ س + ٩ س + ١٨ ٣

[illegible]

[illegible] ٣ س^٣ + ٤ س^٢ + ٦ س + ١٨ س + ٥

وقبل الانتقال الى القسمة الثانية يحذف من الباقي الأول المكبر ، وتعرب الكمية الكبيرة الحدود ، ق ٣

القسمة الثانية

٣ س - ٦ س - ١٨ س + ١٧ س + ٢٩ س + ١٨ | ٣ س + ٤ س - ٦ س - ١٧ س - ٥
- ٣ س - ٤ س + ٦ س + ١٧ س + ٥ س | س - ٥

- ١٠ س - ١٢ س + ٤٤ س + ٤٤ س + ١٨

- ٥ س - ٦ س + ١٧ س + ٢٢ س + ٩

- ١٥ س - ١٨ س + ٥١ س + ٦٦ س + ٢٧

+ ١٥ س + ٢٠ س - ٤٠ س - ٦٠ س - ٢٥

- ٢ س + ٦ س + ٦ س + ٢

س + ٢ س + ٣ س + ١

وتفصل هذا الخارج الصحيح ، الباقي الاول من هذه القسمة الثانية ق ٢ ، وضرب الناتج ق ٣ ، ويحذف من الباقي الثاني المضروب ،

القسمة

قسمة ثانية

$$\frac{\text{س}^3 + 3\text{س}^2 + 3\text{س} + 1}{2\text{س} - 5} \left\{ \begin{array}{l} 3\text{س} - 4\text{س}^2 - 6\text{س}^3 - 10\text{س} - 5 \\ -3\text{س} - 9\text{س}^2 - 9\text{س}^3 - 20\text{س} \end{array} \right.$$

$$-5\text{س}^2 - 15\text{س}^3 - 15\text{س} - 5$$

$$5\text{س}^2 + 15\text{س}^3 + 15\text{س} + 5$$

فيكون القاسم المشترك الأعظم هو $\text{س}^3 + 3\text{س}^2 + 3\text{س} + 1$

بند ٢١٤ وقبل الانتقال الى الاحوال التي تكون فيها الكميات الكثيرة الحدود محتوية على عدة حروف يلزم بيان الكيفية التي يمكن بها ايجاد القاسم المشترك الأعظم بين عدة كميات متى علم القاسم المشترك الأعظم بين كميتين

فاذا كان المطلوب ايجاد القاسم المشترك الأعظم بين الكميات الاربع جـ ، جـ_1 ، جـ_2 ، جـ_3 يفرض أن و هو القاسم المشترك الأعظم بين الكميتين جـ ، جـ_1 وأن وَ هو القاسم المشترك الأعظم بين الكميتين و ، جـ_2 وأن وً هو القاسم المشترك الأعظم بين الكميتين وَ ، جـ_3 فيكون القاسم المشترك الأعظم بين الكميات الاربع جـ ، جـ_1 ، جـ_2 ، جـ_3 هو وً لان و ما كان يحتوى على سائر المضاريب الأولية المشتركة

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

بالنسبة الى الكمية م هو ح = ص - ١ والقاسم المشترك الأعظم بين قوى س بالنسبة الى الكمية ح هو ء = ص² - ٢ص + ١ = (ص - ١)² والقاسم المشترك الأعظم بين ح ، ء هو ص - ١

فاذا قسمت الكمية م على ص - ١ والكمية ح على ص² - ٢ص + ١ تحصل من ذلك الخارجان

ج = ٢(ص - ٢) س³ + ٣ س - (٢ص - ١)

، ء = ٣(ص - ٢) س² + ٧ س - (٣ص + ١)

ولكى يكون خارج قسمة الكمية ج على الكمية ء صحيحين تضرب الكمية ج فى ٣ فيتحصل الباقى

- ٥ س + ٢(٣ص + ١) س - ٣(٢ص - ١)

ويلزم لتوالى عملية القسمة ان يضرب المقسوم الجزئى الثانى فى ٣(ص - ٢) فيتوصل الى باق ذى درجة اولى بالنسبة الى س هو

(١٨ص² - ٣٠ص + ٢٢) س - (١٨ص² - ٣٠ص + ٢٣)

فاذا حذف من هذا الباقى المضروب ١٨ص² - ٣٠ص + ٢٣ آل الى

ق = س - ١

وبقسمة الكمية ء على الباقى ق يكون باقى هذه القسمة صفرًا

ويؤخذ

[illegible]

[illegible] وبناء على ذلك يكون [illegible]

لكميتين مفروضتين م ، ح هو

(ص − ١)(س − ١) = ص س − س − ص + ١

بند ١١٤ ولننتقل ايضاً من الحالة التي تكون فيها الكميات كثيرة حدود محتوية على حرف واحد فقط الى الحالة التي تكون فيها هذه الكميات محتوية على حرفين ثم ننتقل من هذه الحالة الاخيرة الى الحالة التي تكون فيها تلك الكميات محتوية على ثلاثة حروف وهلم جرا وبناء على ذلك يمكن تعيين القاسم المشترك الأعظم بين عدة كميات محتوية على عدة حروف

بند ١١٥ ولنمثل لذلك بالكميتين ج ، ء المتحصلتين في بند ١١٣ وهما

ج = −٤ح ش + ١٤ ح ش − ١٤ ح ش − ١٤ ح ص س + ١٤ ص م

ء = −ح ش + ح ش + ح ش − ح ش − ح ش − ح ش

وحيث أن الكمية ء لا تحتوي على س فلا يمكن حذف حرف في تقاسم المشترك الأعظم بين الكميتين وبناء على ذلك يكون قاسماً مكررات الكمية ج المرتبة بالنسبة الى ص هكذا

−٤ح ش + ١٤ ح ش − ١٤ ح ش − ١٤ ح ص + ١٤

وحينئذ يبحث عن القاسم المشترك الأعظم بين هاتين الكميتين الكثيرتي الحدود الأخيرتين أو عن القاسم المشترك الأعظم بين

$$-٢ح^٢ش + ٧ح س - ٦ \text{ و } -ح س + ٢$$

فيرى أنه $-ح س + ٢$ وحيث أن هذا القاسم يقسم الكمية ء قسمة صحيحة فيؤخذ من ذلك أن $-ح س + ٢$ هو القاسم المشترك الأعظم بين الكميتين الكثيرتي الحدود جـ و ء

ولنذكر للتمرين مثالين هما

الاول $جـ = ٦ش^٣ - ٦ص ش + ٢ش س - ٢ص^٣$ و

$ء = ١٢ش - ١٥ص س + ٣ص$

فالقاسم المشترك الأعظم بين هاتين الكميتين هو $س - ص$

والثاني $جـ = (ء - هـ)ش + (٢ح ء - ٢ح هـ)س + ح^٢ء - ح^٢هـ$ و

$ء = (ح ء - ح هـ + ح^٢ - ء هـ)س + ح^٢هـ + ح ح^٢ - ح^٢ء - ح ء هـ$

فالقاسم المشترك الأعظم بين هاتين الكميتين هو $ء - هـ$

في تحليل الدلالات التامة لكميات كالكمية س الى مضاريب بدرجة اولى

٢١٦ ويطلق على الكمية الجبرية اسم الدلالة التامة لحرف أو لعدة حروف

اذا كانت

ذا كانت تحتوى لا على قوى صحيحة موجبة لهذه الحروف وكانت مكررة

هذه القوى كميات سيما اتفقت وحينئذ فالكمية ذات الحدود [illegible]

$\text{ش} - \frac{\text{س}\sqrt{\text{٢}}}{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}$ دلالة تامة للحرف س والكمية

$\text{ش} - \frac{\text{٣ س ص}}{\text{٢}} - \frac{\text{٢}}{\sqrt{\text{٢}+\text{١}}}$ دلالة تامة للحرفين س ، ص

ويقال أيضًا ان لدلالة التامة لكمية واحدة أو لعدة كميات تكون قابلة للقسمة على دلالة اخرى تامة لهذه الكميات متى كان الخارج قسمة تامًا بالنسبة لتلك الكميات

وقد علم من حل المعادلات ذات الدرجة الثانية ان مقدار لا وس معادلة مشابهة لهذه المعادلات هو حاصل ضرب مقدار وبين معادلة اولى بالنسبة الى س وعلى ذلك تكون الكمية ذات الحدود [illegible]

$\text{ش} - \frac{\text{س}\sqrt{\text{٢}}}{\text{٣}} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}$ مثلاً هى حاصل ضرب مقدارين [illegible]

$\text{س} - \frac{\sqrt{\text{٢}} - \text{٤} - \text{٣}}{\text{٦}}$

وسيأتى أن هذه النظرية تعتبر كالمقدمة [illegible] عامة هى أن دلالة تامة للكمية س كالدلالة $\text{ش}^{\text{م}} + \text{ج ش}^{\text{م}-\text{١}} + \text{د ش}^{\text{م}-\text{٢}} + \dots$ (نجعل م رمزًا لعدد صحيح هو درجة الدلالة ومكررة حد الأول هو الواحد) تكون نهاية عن حاصل ضرب عدة مقادير بدرجة [illegible]

عددها م كالمضاريب س - ح ، س - د ، س - هـ ، ك وذلك بجعل ح ، د ، هـ ، ك رموزاً لكميات مشتملة على المتغير س ويمكن أن تكون هذه الكميات مقادير تخيلية توضع بالصورة ل + ف √-١ فان كان مكرر الحد الأول من الدلالة غير الواحد فانه يتحصل من قسمتها على هذا المكرر خارج درجته عين درجتها يتحلل بالمثابة المتقدمة فاذا جعل ج رمزاً لمكرر الحد الأول فان الدلالة المذكورة تكون مساوية لحاصل ضرب يوضع بالصورة ج (س - ح)(س - د) ن ك

سند ٢١٧ النظريات المتقدمة (في بندى ٢٠٦ و ٢٠٧) تطبق على المضاريب التي بدرجة اولى من الدلالات التامة ولا تختلف عنها الا ببعض تغيير في منطوق المسائل وبراهينها

النظرية الاولى

سند ٢١٨ أي مضروب بدرجة اولى كالمضروب س - ح الذي يقسم حاصل ضرب الدلالتين التامتين ج ، ء يقسم بالضرورة ولمدة منهما لانه اذا كانت الدلالة ج لا تقبل القسمة على س - ح تحصل من القسمة خارج صحيح كالخارج ك بالنسبة الى س وباق كالباقي ر غير المحتوي س وحينئذ تحصل هذه المساوية وهي

= ج

$$ج = (س - ح) \times ك + ر$$

ومنها يؤخذ

$$\frac{ج - ر}{س - ح} = ا \times ك + \frac{ر}{س - ح}$$

وينبغي بالفرض ان يكون $\frac{ج - ر}{س - ح}$ كناية عن دلالة تامة للمتغير س وحيث أن الباقي ر كمية غير محتوية على س فيلزم ان يكون $\frac{ر}{س - ح}$ دلالة تامة للمتغير س وعلى ذلك اذا كان س - ح لا يقسم الدلالة ج يلزم ان يكون قاسمًا للدلالة ا

النظرية الثانية

بند ٢١٩ أي دلالة تامة للمتغير س لا يكون لها غير جملة واحدة من المضاريب التي بدرجة اولى

وللبرهنة على هذه النظرية يفرض حاصل الضرب

$$ج (س - حَ)(س - كَ)(س - هَ) \ldots\ldots\ldots\ldots (س - حَ)$$

فاذا جعل ج رمزًا المضروب غير محتو على س وفرض هذا الحاصل يساوي حاصل ضرب آخر هو

$$جَ (س - حَ)(س - كَ)(س - هَ) \ldots\ldots\ldots\ldots (س - حَ)$$

فان المضروب س - حَ الذي يقسم الحاصل الثاني يكون قاسمًا بالضرورة للحاصل

الأول وحينئذ يلزم بمقتضى النظرية المتقدمة انه يكون قاسماً لواحد من
المضاريب س - ح ، س - د ، ح ومن هنا يعلم انه يكون مساوياً لأحد المضارب
مثلاً اذا فرض ان ح = د وقطع النظر عن المضروبين المتساويين س - ح
، س - د كان الخارجان متساويين ومن هنا يؤخذ أن المضروب
س - د يكون مساوياً لواحد من المضاريب س - د ، س - ه ، ح
ويتولى العمل بهذه المثابة يعلم أن مضاريب حاصل الضرب المشتملة على
س تكون متساوية النظير لنظيره وحينئذ ينتج من ذلك أن ج = ج
بيد ليفرض أن ج ، ء كناية عن دلالتين قائمتين للمتغير س فاذا
كانت مضاريب بدرجة أولى من مضاريب الدلالة ج تقسم الدلالة
ء فان حاصل ضرب هذه المضاريب المشتركة يكون هو القاسم المشترك
الأعظم بين الدلالتين المذكورتين بالنسبة الى س
وتحصيل هذا القاسم المشترك الأعظم يلزم أن يجرى على دلك عمل مشابه
لعملية ايجاد القاسم المشترك الأعظم بين كميتين صحيحتين كبيرتى العدد
لانه اذا فرض أن الدلالة ء لا تزيد في الدرجة عن الدلالة ج وكانت
الدلالة ء تقسم الدلالة ج كانت هي القاسم المشترك الأعظم
المطلوب فاذا لم تكن قاسمة لها يفرض أن خارج القسمة هو ك والباقي ر

فان

[illegible] كانت [illegible] هذه [illegible]

وتقتضي هذه متساوية تكون [illegible]

بين المضاربين المشتركة بين [illegible] وجبلة [illegible] في [illegible]

[illegible] كما حرت على [illegible] وبنوا معهم هكذا بنوصري فان لا يكون

[illegible] فان كان هذا [illegible] معدوما كان [illegible]

هو القاسم مشترك الأعظم مطلوب وان كان غير معدوم لم يكن بين

الكميتين [illegible] الكثيرتي الحدود مضروب مشترك بالنسبة الى [illegible]

[illegible] تاسع

في نظريات غير [illegible] تتعلق [illegible] ذات مجهول واحد ودرجتها

[illegible] بدرجة

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

رموز اللوكيات المعلومة

ولا يفرض للحد الأول مكرر غير الواحد لانه ان اختلف عن الواحد قسمت سائر حدود المعادلة على هذا المكرر بدون أن يختل تعادلها

بند برمز على وجه الاختصار لدلالات كمية كالكمية س بالرموز د(س) و ء(س) و هـ(س) و لخ وبرمز أيضاً لدلالات الكميتين س ، ص بالرموز د(س ، ص) ، ء(س ، ص) و لخ ولابد من اختلاف الرمز الموضوع امام القوسين اذا اختلفت الدلالات المذكورة لكن اذا تكرر الحرف الواحد المستعمل بهذه المثابة في عملية حسابية كان دالاً على دلالات مركبة بكيفية واحدة وحينئذ اذا كانت دلالة مبينة بالرمز د(س) فالرمز د(ح) يكون دالاً على ما تؤول اليه هذه الدلالة اذا وضع فيها ح بدل س والرمز د(ص - ٢) يكون دالاً على ما تؤول اليه تلك الدلالة اذا وضع فيها ص - ٢ بدل س والرمز د(٣) يكون دالاً على ما تؤول اليه عندما يفرض فيها أن س = ٣ وكذلك يكون الرمز د(س ، ٣) دالاً على ما تؤول اليه الدلالة ء(س ، ص) عندما يفرض فيها أن ص = ٣ وأن س يكون باقياً على حاله

بند ولكي يحسب بأبسط طريقة المقدار الذي يكون لدلالة تامة للكمية س عندما يفرض للتغير س مقدار رقمي يجري العمل كما في هذا المثال وهو لتفرض الكمية الكثيرة الحدود

$$٤ س - ١٣ س^{٢} + ٥ س^{٣} - ٤ س^{٤} - ٨$$

ويفرض أنه يراد تحصيل مقدار هذه الكمية الكبيرة للحدود عندما يكون س = ٢

فيجرى العمل بهذه المثابة وهى .

٤ × ٢ − ١٣ = −١ ، −١ × ٢ + ٥ = +٣ ، +٣ × ٢ − ٤ = +٢

، +٢ × ٢ = +٦ ، +٦ × ٢ − ٨ = +١٠

وحينئذ يكون العدد ١٠ هو الناتج المطلوب لان هذا العدد يكون بموجب هذه العمليات مساويًا

$$٤ \times ٢^{٥} \quad ١٣ \times ٢^{٤} \quad ٥ \times ٢^{٣} - ٤ \times ٢^{٢} - ٨$$

ويسمى ويطلق اسم جذر المعادلة على الكمية أو مقدار تخلى اذا وضع فى هذه المعادلة بدل المجهول حصرها مطابقة

والحل العمومى للمعادلات يحصر فى ايجاد مقادير الجذور بالنسبة لمكررات جميع المعادلات المتحدة فى الدرجة وقد صار البحث مدة طويلة عن هذا الغرض وذكرت (فى سند) الكمية التى تحصل التوصل بها الى حل المعادلة ذات الدرجة الثالثة وسيأتى بيان الكمية التى يتوصل بها الى حل المعادلة ذات الدرجة الرابعة غير أن القوانين المتحصلة بهذه المثابة توضع بصورة لا يمكن استعمالها فى ايجاد المقادير الرقمية للجذور بواسطة استبدالها بمقادير المكررات مالم تكن

هذه الأخيرة محققة لبعض شروط خصوصية كما تقدم ذلك فى المعادلة ذات الدرجة الثالثة

وشرح هذه الصعوبة كانت تتأتى فى المعادلة التى تزيد عن تلك المعادلة فى الدرجة لو حصل التوصل الى حلها بالقوانين المذكورة

وكان يلزم حينئذ أن يبحث عن الطرق التى يمكن بواسطتها حساب جذور معادلة جميع مكرراتها مبينة باعداد معلومة

وننتهى لذكر النظريات العمومية التى قد بنيت عليها هذه الطرق فنقول

فى تركيب تحليل الكمية الناتجة من دلالة تامة للمتغير س

عند وضع س+ص بدل س

يجد لكن جـ س^م + د س^{م-١} + هـ + ... ح

هى بدلالة تامة مثلا

واذا وضع س+ص بدل س آل ذلك الى

جـ (س+ص)^م + د (س+ص)^{م-١} + هـ (س+ص)^{م-٢} + ... ح

واذا حللت قوى الكمية ذات الحدين س+ص ورتبت بحسب الدرجات التنازلية للمتغير س تحصل

جـ س^م + م جـ س^(م-١)	ص + م (م - ١) جـ س^(م-٢)	ص
+ ب س^(م-١) + (م-١) ب س^(م-٢)	+ (م-١)(م-٢) ب س^(م-٣)	١ ! ٢ + ك
+ هـ س^(م-٢) + (م-٢) هـ س^(م-٣)	+ (م-٢)(م-٣) هـ س^(م-٤)	
+ ..... ك	+	

ثم يوضع على وجه الاختصار

$$\text{ص} = \text{جـ س}^{\text{م}} + \text{ب س}^{\text{م}-١} + \text{هـ س}^{\text{م}-٢} + \text{ك}$$

$$\text{ص}' = \text{م جـ س}^{\text{م}-١} + (\text{م}-١)\,\text{ب س}^{\text{م}-٢} + (\text{م}-٢)\,\text{هـ س}^{\text{م}-٣} + \text{ك}$$

$$\text{ص}'' = \text{م}(\text{م}-١)\,\text{جـ س}^{\text{م}-٢} + (\text{م}-١)(\text{م}-٢)\,\text{ب س}^{\text{م}-٣} + (\text{م}-٢)(\text{م}-٣)\,\text{هـ س}^{\text{م}-٤} + \text{ك}$$

....

وحينئذ تكون [illegible]

[illegible]

وحيث أن ص هي الكمية الكثيرة الحدود المفروضة [illegible]
من الكمية الكثيرة الحدود ص بضرب كل حد [illegible]
عن أصله بواحد في هذا الحد وتستنتج [illegible]
السابقة عليها كما استنتجنا الكمية ص' من الكمية ص
ويطلق على الكمية الكثيرة الحدود ص' [illegible]

فقط وعلى المشتقة $\text{ءَ}''$ اسم مشتقة $\text{ءَ}''$ و الخ ويقال ايضاً للكمية $\text{ءَ}''$ المشتقة الثانية وللكمية $\text{ءَ}'''$ المشتقة من المرتبة الثالثة وهلم جرا

ومتى كانت دلالة مبينة بالرمز ء (س) كانت مشتقاتها المتوالية مبينة بالرموز ء′ (س) و ء″ (س) و ء‴ (س) و الخ وبمقتضى ذلك تؤول المعادلة السابقة الى

$$\text{ء}(\text{س}+\text{ص}) = \text{ء}(\text{س}) + \text{ء}'(\text{س})\text{ص} + \text{ء}(\text{س})\frac{\text{ص}^{2}}{1\times 2} + \text{ء}''(\text{س})\frac{\text{ص}^{3}}{1\times 2\times 3} + \text{الخ}$$

وحيث أن اعلى أس للكمية س ينتقص عن اصله بواحد بالانتقال من كمية كثيرة الحدود معلومة الى مشتقتها الاولى أو من مشتقة الى التالية لها فيتكون من كمية كثيرة الحدود درجتها م مشتقات متوالية عددها م الأخيرة منها غير محتوية على س ويشاهد بالسهولة انه اذا كان الحد الاول من الكمية الكثيرة الحدود مبيناً كما سبق بالرمز جـ $\text{س}^{\text{ن}}$ كانت المشتقة الأخيرة أو المشتقة التي رتبتها م مبينة هكذا

$$1\times 2\times 3\times \ldots\ldots \times \text{م} \times \text{جـ}$$

وبناء على ذلك يتحصل من قانون الحدود المركبة للدلالة ء (س+ص) المقدار جـ $\text{ص}^{\text{ن}}$ للحد الأخير وهذا هو المشاهد فيما تقدم اذ من البديهي بعد وضع س+ص بدل س في الكمية الكثيرة الحدود جـ $\text{س}^{\text{ن}}$ + ء $\text{س}^{\text{ن}-1}$ + الخ أنه يحدث من الكمية جـ (س+ص)^{ن} الحد جـ $\text{ص}^{\text{ن}}$ وحينئذ لا يكون هناك حد آخر يكون فيه أس ص مساوياً للاس م أو أكبر من الأس م

بند ٢٤٦ ولتطبيق ما تقدم على مثال يتعلق باستعمال المشتقات تفرض الكمية الكثيرة الحدود

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٥} + ٥\,\text{س}^{٤} + \text{س}^{٣} - ١٦\,\text{س}^{٢} - ٢٠\,\text{س} - ١٦$$

فاذا اريد تحصيل الكمية التي تؤول اليها هذه الكمية الكثيرة الحدود عند وضع ص − ١ بدل س فانه يلزم أن تحسب المشتقات المتوالية

وحينئذ تكون المشتقة الاولى هي

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٥\,\text{س}^{٤} + ٢٠\,\text{س}^{٣} + ٣\,\text{س}^{٢} - ٣٢\,\text{س} - ٢٠$$

وبقسمة المشتقة الثانية على ٢ يتحصل

$$\frac{\text{ق}''(\text{س})}{١ \times ٢} = ١٠\,\text{س}^{٣} + ٣٠\,\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} - ١٦$$

وبقسمة مشتقة هذه الدلالة الأخيرة على ٣ يتحصل

$$\frac{\text{ق}'''(\text{س})}{١ \times ٢ \times ٣} = ١٠\,\text{س}^{٢} + ٢٠\,\text{س} + ١$$

وبقسمة مشتقة هذه على ٤ يتحصل

$$\frac{\text{ق}''''(\text{س})}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} = ٥\,\text{س} + ٥$$

ثم بقسمة مشتقة هذه على ٥ يتحصل

$$\frac{\text{ق}'''''(\text{س})}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥} = ١$$

فاذا وضع في هذه الدلالات المتنوعة −١ بدل س حدث

$$\text{ق}(-١) = -٩ \text{ و } \text{ق}'(-١) = \text{و} \quad \frac{\text{ق}''(-١)}{١ \times ٢} = ١ \quad \frac{\text{ق}'''(-١)}{١ \times ٢ \times ٣} = -٩ \text{ و } \frac{\text{ق}''''(-١)}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} = \text{و} \quad \frac{\text{ق}'''''(-١)}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥} = \text{و}$$

ومن هنا ينتج

$$\text{ء}(\text{ص}-١) = \text{ص}^{٥} - ٩\,\text{ص}^{٣} + \text{ص}^{٢} - ٩$$

فاذا استعملت الطريقة المتقدمة فى تحصيل الكمية التى تؤول اليها الكمية الكثيرة الحدود $\text{ء}\,\text{س}^{٤} - ٥\,\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} - ١$ عندما يوضع فيها $\text{ص} - \text{ء}$ بدل س حدث $\text{ء}\,\text{ص}^{٤} - ١٦\,\text{ص}^{٣} + ٢٣\,\text{ء}\,\text{ص}^{٢} - ٤١\,\text{ص} + ٥$

فى المقادير التى تأخذها دالة تامة للمتغير س عندما يفرض له مقادير كبيرة أو صغيرة وفى التغيرات التى تطرأ على الدالة عندما يأخذ س فى التغير بالتوالى

سند ٢٢٧ فى كثيرة الحدود $\text{ء}\,\text{س}^{\text{م}} + \text{ب}\,\text{س}^{\text{د}} + \text{جـ}\,\text{س}^{\text{هـ}} + \text{الخ}$ اذا كانت الأسس م ، د ، هـ ، الخ اعدادا صحيحة موجبة مكونة لمتسلسلة تنازلية وفرض للمتغير س مقادير رقمية كبيرة وموجبة او سالبة كانت مقادير كثيرة الحدود متحدة فى العلامة مع مقادير الحد الأول $\text{ء}\,\text{س}^{\text{م}}$ ويمكن أن يفرض للمتغير س مقدار كبير بحيث يكون مقدار كثيرة الحدود كبيرا بقدر ما يراد ولذا توضع كثيرة الحدود المفروضة هكذا

$$\text{ء}\,\text{س}^{\text{م}}\left(١ + \frac{\text{ب}}{\text{ء}} \times \frac{١}{\text{س}^{\text{م}-\text{د}}} + \frac{\text{جـ}}{\text{ء}} \times \frac{١}{\text{س}^{\text{م}-\text{هـ}}} + \text{الخ}\right)$$

فاذا كان للمتغير س مقدار كبير جدا كانت مقادير الكسور $\frac{١}{\text{س}^{\text{م}-\text{د}}}$ و الخ صغيرة جدا وبناء على ذلك يكون للحدود $\frac{\text{ب}}{\text{ء}} \times \frac{١}{\text{س}^{\text{م}-\text{د}}}$ و $\frac{\text{جـ}}{\text{ء}} \times \frac{١}{\text{س}^{\text{م}-\text{هـ}}}$ و

مقادير صغيرة [illegible]

ذات كثيرة حدود [illegible]

ذات نكون [illegible] مقادير موجبة [illegible]

مقادير [illegible] علامة [illegible]

كثيرة حدود كثيرة بمقدار [illegible]

وغيرها

[illegible] ذات كثيرة حدود [illegible] كانت [illegible]

[illegible] أعداد [illegible] موجبة وتكون [illegible] تصاعدية وكانت

كثيرة حدود مركبة من عدد محدود من حدود دوس متغير من مقدار

صغير جدا موجب وسالب كانت كثيرة حدود مقدار صغير مقدار في علامة

مع مقدار محدد لأول [illegible]

ولذا يوضع كثيرة حدود مفروضة هذه

[illegible]

فإذا كان متغير من مقدار صغير جدا [illegible] كانت [illegible]

[illegible] موجبة جميع مقادير صغيرة [illegible] متغير من [illegible]

ذات كثيرة حدود المحصورة بين نقوس مقادير [illegible] من لو حد [illegible]

وبناء عليه تكون موجبة وحينئذٍ يكون لكثيرة الحدود مقادير متحدة في العلامة مع مقادير الحد الأول جـ سـ^ن ويمكن زيادة على ذلك أن يكون لكثيرة الحدود مقدار صغير بقدر ما يراد لكون المضروب جـ سـ^م يتناقص مع س الى غير نهاية

بند ٢٢٩ اذا علمت دلالة تامة كالدلالة د(س) ومقدار مخصوص كالمقدار جـ للمتغير س أمكن تحصيل كمية كالكمية ك صغيرة بقدر ما يراد بحيث يكون الفرق د(جـ + ك) - د(جـ) أقل من كمية معلومة صغيرة بقدر ما يراد ايضاً ولذا يشاهد (بمقتضى بند ٢٢٥) أن

د(جـ + ك) - د(جـ) = د'(جـ) ك + د''(جـ) $\frac{ك^٢}{١ \times ٢}$ + د'''(جـ) $\frac{ك^٣}{١ \times ٢ \times ٣}$ + ...

فاذا فرض للكمية ك مقدار صغير جداً كان لكل من الحدود د'(جـ) ك و د''(جـ) $\frac{ك^٢}{١ \times ٢}$ و ... مقدار صغير جداً وحيث أن عدد هذه الحدود محدود فيلزم أن تكون الكمية ك صغيرة جداً فيكون مجموع هذه الحدود صغيراً بقدر ما يراد وحينئذٍ يثبت المطلوب

تنبيه

اذا كان ل، ى عددين معلومين وكان ى أكبر من ل واريد: تعيين الكمية ك بحيث يحصل بالنسبة لأي مقدار يفرض للمتغير س كالمقدار

المحصورين [illegible]

[illegible]

[illegible] رمز الكمية صغيرة [illegible] وكان عدد [illegible] أكبر من
سائر المكررات الداخلة في الكميات الكثيرة محدود [illegible] ن
[illegible] فان كل حد من حدود هذه الكميات يكون بالنسبة لأي
مقدار للمتغير س محصورين [illegible] أصغر من [illegible] ان كان
[illegible] وأصغر من [illegible] وبناء على ذلك يكون مقدار كل
[illegible] كثرة الحدود أصغر من [illegible] بحسب ما يكون
[illegible] فاتقرر هذا يجعل [illegible] رمز العدد [illegible] ان كان
وللعدد م [illegible] ان كان [illegible] بحصر [illegible] (د)
بالنسبة لأي مقدار متغير [illegible]

[illegible]

بحيث ان الطرف الثاني [illegible]
فان فرض ولأن [illegible] أصغر من [illegible]
وثانيا فرض أن [illegible]
يتحقق الشرط الأول متى كان [illegible] وبناء على ذلك اذا فرض متغير
س مقادير لا تزال آخذة في الزيادة بالابتداء من ن الى [illegible] وكان

الفرق بين كل مقدارين متواليين مساويًا $\frac{ط}{ع+ط}$ أو أصغر من هذا الكسر يحصل للدلالة ع (س) جملة مقادير الفرق فيها بين كل مقدارين متواليين منها أصغر من ط

في بعض نظريات يعلم بواسطتها ان كل معادلة لها جذر حقيقي وفي هذه النظرية وهي أن كل معادلة لها جذر

النظرية الاولى

بند ٢٣٠ اذ تحصل من العددين ل ، ے الموضوعين في الطرف الأول من معادلة كالمعادلة ع (س) = . فاتجان متخالفان في العلامة كان للمعادلة بالأقل جذر حقيقي محصور بين ل ، ے لانه يمكن بمقتضى ما تقدم في البند السابق أن تفرض للمتغير س مقادير لا تزال آخذة في الزيادة بالابتداء من ل الى ے بحيث تكون الفروق بين المقادير المطابقة للكمية ع (س) كلها اقل من كمية كالكمية ط التي تؤخذ صغيرة بقدر ما يراد ولا بد أنه يوجد بين مقادير ع (س) مقداران متواليان

يكونان متخالفين فى العلامة لان المقدارين المتطرفين ء (ل) ، ء (ے) متخالفان فى العلامة بالفرض وحيث أنه يوجد بين مقدارى الكمية ء (س) المتواليين المتخالفين فى العلامة فرق أصغر من الكمية ط فيكون كل منهما أصغر من هذه الكمية وحيث أنه لابد من وقوع ذلك على أى وجه كان صغر الكمية ط فيؤخذ من ذلك أنه يوجد بين ل ، ے بالأقل مقدار للمتغير س بحيث تكون الكمية ء (س) مساوية للصفر

تنبيه

حيث انه يمكن أن الكمية الكثيرة الحدود ء (س) تنتقل عدة مرات من الايجاب الى السلب ومن السلب الى الايجاب عندما يأخذ المجهول س فى التغير من ل الى ے فلا مانع من انه يكون للمعادلة ء (س) = ٠ عدة جذور حقيقية محصورة بين ل ے

النظرية الثانية

سند كل معادلة ذات درجة فردية لها بالأقل جذر حقيقى مخالف فى العلامة مع حدها الأخير

مثلا لتفرض المعادلة

$$س^{م} + ج س^{م-١} + ء س^{م-٢} \ldots\ldots \pm ح = ٠$$

ويفرض فيها أن م كناية عن عدد فردى

فاذا لوحظت فى مبداء الأمر الحالة التى يكون فيها الحد الأخير سالبًا وجعل س = ٠ فى الطرف الأول من المعادلة المذكورة كان الناتج سالبًا لكونه هو الحد الأخير واذا فرض للمتغير س مقدار كبير بحيث يكون الطرف الأول متحدًا فى العلامة مع حده الاول (كما فى بند ٢٢٧) كان الناتج موجبًا وحينئذ يكون للمعادلة بالأقل جذر موجب فاذا كان الحد الأخير موجبًا وجعل س = ٠ كان الناتج موجبًا واذا فرض للمتغير س مقدار سالب كبير بالكفاية كان الناتج سالبًا وحينئذ يكون للمعادلة بالأقل جذر سالب

النظرية الثالثة

بند ٢٢٢ كل معادلة ذات درجة زوجية حدها الأخير سالب يكون لها بالأقل جذران حقيقيان احدهما موجب والآخر سالب .

لانه اذا جعل فيها س = ٠ كان الناتج سالبًا واذا فرض للمتغير س مقدار كبير موجب أو سالب كان هذا الناتج موجبًا لانه متحد فى العلامة مع الحد الأول الذى لا يزال موجبًا لكونه من درجة الدرجة

النظرية الرابعة

بند ٢٢٣ اذا كان الطرف الأول من معادلة مركبًا من جملة حدود موجبة

متبوعة بعدة حدود اخرى سالبة (بفرض ان الطرف الثانى معدوم) فلا يكون للمعادلة غير جذر واحد موجب فقط

مثلاً لتفرض المعادلة

$$\text{س}^{\text{م}} + \text{ج}\,\text{س}^{\text{م}-1} + \dots + \text{ح}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ن}} - \text{ك}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ن}-1} - \dots\dots\dots = \text{ر}$$

التى يرى فيها ان الحدود موجبة الى $\text{ح}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ن}}$ وأن جميع الحدود التالية لها سالبة فحيث أن الحد الأخير من هذه المعادلة سالب فلا يكون له جذر موجب لكنه يلزم ان يبرهن على انه لا يكون له غير جذر واحد وحينئذ يمكن وضع الطرف الأول من المعادلة هكذا

$$\text{س}^{\text{م}-\text{ن}}\left(\text{س}^{\text{ن}} + \text{ج}\,\text{س}^{\text{ن}-1} \dots\dots + \text{ح} - \frac{\text{ك}}{\text{س}} \dots\dots\dots - \frac{\text{ر}}{\text{س}^{\text{م}-\text{ن}}}\right)$$

فاذا اخذ المتغير س فى الازدياد بالابتداء من الصفر فان الكمية

$\text{س}^{\text{ن}} + \text{ج}\,\text{س}^{\text{ن}-1} \dots + \text{ح}$ لا تزال آخذة فى الزيادة التى تكون فيها ثابتة وهذا لا يتأتى الا اذا كان الحد الأول من المعادلة موجباً دون غيره وأما الكمية $\frac{\text{ك}}{\text{س}} + \dots\dots + \frac{\text{ر}}{\text{س}^{\text{م}-\text{ن}}}$ فانها لا تزال آخذة فى التناقص فاذا اذا بلغ المتغير س النهاية فى الزيادة فان علامة الطرف الأول من المعادلة لا تتغير الا مرة واحدة واذاً لا يكون لهذه المعادلة غير جذر واحد موجب

النظرية الخامسة

بند ٣٢٥ أى معادلة لها جذر يوضع هكذا $ح + د\sqrt{-١}$ و $ح$ و $د$ هما كميتان حقيقيتان

مثلاً اذا فرضت المعادلات الاربع

$س = +١$ و $س = -١$ و $س = +\sqrt{-١}$ و $س = -\sqrt{-١}$

شوهد أن المعادلة $س = +١$ لها جذر دائماً لانها تتحقق مهما كان م بفرض $س = ١$ وأما المعادلات الثلاث الباقية فيظهر ان لواحدة منها وهى $س = -١$ بالأقل جذر حقيقى أو تخيلى وان كل واحدة من المعادلتين الآخريين وهما $س = +\sqrt{-١}$ و $س = -\sqrt{-١}$ يكون لها جذر تخيلى متى كان م دالاً على عدد بهذه الصورة $٢^{ك}$ وحيث أنه لم يبق علينا الا أن نختبر فى هاتين المعادلتين الاخيرتين الحالة التى يكون فيها م دالاً على عدد فردى او على حاصل ضرب عدد فردى فى واحدة من قوى العدد ٢ فنقول ليكن $م = ٢^{ك} \times ح$ (بجعل ح رمزاً للعدد فردى) فاذا جعل $س^{٢^{ك}} = ص$ نحصل من ذلك المعادلتان :

$$ص^{ح} = +\sqrt{-١} \text{ و } ص^{ح} = -\sqrt{-١}$$

وحيث أنه سيأتى فى بند ١٣٢٢ أن $(\pm\sqrt{-١})^{ح} = \pm ١$

$$(+\sqrt{-1})^{2\text{ج}+1} = +\sqrt{-1} \quad ، \quad (-\sqrt{-1})^{2\text{ج}+2} = -1$$

فيحدث بالبناء على ذلك

$$(-\sqrt{-1})^{2\text{ج}+1} = -\sqrt{-1} \quad ، \quad (-\sqrt{-1})^{2\text{ج}+2} = +1$$

وهذه المتساويات يؤخذ منها ان كل واحدة من المعادلتين السابقتين المتين جعل فيهما ج رمز العدد وفوق لها دائماً جذر يساوى $+\sqrt{-1}$ أو $-\sqrt{-1}$ فاذا فرض معادلة $\text{س}^{\text{ك}} = \text{ص}$ أن $\text{ص} = +\sqrt{-1}$ أو $\text{ص} = -\sqrt{-1}$ فانه ينتج منها متغير س مقادير توضع بالصورة $\text{ع} + \text{ك}\sqrt{-1}$ ومن هنا يعلم أنه لو وجد لهذا المتغير س مقادير تخيلية تحقق بها المعادلتان $\text{س}^{\text{م}} = +\sqrt{-1}$ و $\text{س}^{\text{م}} = -\sqrt{-1}$ ولنفرض الآن المعادلة

$$\text{س}^{\text{م}} + \text{ج}_1\,\text{س}^{\text{م}-1} + \text{ج}_2\,\text{س}^{\text{م}-2} + \dots\dots + \text{ج}_{\text{م}-1}\,\text{س} + \text{ج}_{\text{م}} = \dots\dots \quad (1)$$

التي المعاملات ج جميعها مكررات ج و ج ن ... و ج م ج دالة فيها على كيان حقيقية أو على مقادير تخيلية

فاذا فرض في الطرف الأول من هذه المعادلة أن $\text{س} = \text{ع} + \text{ك}\sqrt{-1}$ ولوحظ أن ع و ك دالان في هذا المقدار على كميتين حقيقيتين تخص من ذلك مقدار تخيلي $\text{ع} + \text{ك}\sqrt{-1}$ و ع و ك هما دالان حقيقيتان تامان لكل من ع و ك وحينئذ يلزم لتحقيق هذه المعادلة

أن يكون ج = ٠ ، ك = ٠ أو ج² + ك² = ٠ . ولنتصدى للبرهنة على أنه يوجد دائماً لكل من ج ، ك مقداران حقيقيان بحيث يتحقق هذا الشرط وهو أن ج² + ك² = ٠ . ونثبت في مبدإ الأمر أن أصغر مقدار يفرض للكمية ج² + ك² عند تغيير كل من ج ، ك يكون مطابقاً لمقدارين محدودين من مقادير ج ، ك ثم نبرهن على أن هذا المقدار لا يكون الاصغر (ولا يخفى أن الكمية √(ج² + ك²) هي المعروفة كما سبق في قياس المقدار التخيلي ج + ك √(−١)) فنقول

انه يلزم للبرهنة على أن أصغر مقدار للقياس √(ج² + ك²) يكون مطابقاً لمقدارين محدودين من مقادير ج ، ك أن نثبت انه اذا اخذت الكميتان ج ، ك أو احداهما في الزيادة الى غير نهاية أخذ القياس √(ج² + ك²) في الزيادة الى غير نهاية كذلك ولذا يكتب الطرف الأول من المعادلة هكذا

$$س^{ن}\left(١ + \frac{ج}{س} + \frac{ج^{٢}}{س^{٢}} + \dots + \frac{ج^{ن}}{س^{ن}}\right)$$

ثم يجعل س = ج + ك √(−١) فيحدث

$$س^{ن} + ك^{ن}\sqrt{(-١)} = (ج + ك\sqrt{(-١)})^{ن}\left[١ + \frac{ج}{ج + ك\sqrt{(-١)}} + \frac{ج^{٢}}{(ج + ك\sqrt{(-١)})^{٢}} + \dots + \frac{ج^{ن}}{(ج + ك\sqrt{(-١)})^{ن}}\right]$$

وسيأتي في بندي ٢٣٦ و ٢٣٨ ان قياس حاصل ضرب عدة مقادير تخيلية هو حاصل ضرب

ضرب أقيسة المضاريب وأن قياس خارج قسمة المقدارين لقيمتين من هذه
هو خارج قسمة قياس المقدم على قياس المقسوم عليه وحيث أن قيمة
المكررات ج، ج، ... ، ج دالة على كميات منتهية فان حدث
نكيتان ع، ك أو احداهما في الزيادة الى غير نهاية اخذت قيمة
الكسور $\frac{ج}{ع+ك\sqrt{-1}}$ ، $\frac{ج}{(ع+ك\sqrt{-1})^2}$ ، ... ، $\frac{ج}{(ع+ك\sqrt{-1})^م}$ في تناقص
الى غير نهاية أو ان هذه الكسور تؤول الى مقادير تخيلية لا مقادير
$ب + جـ\sqrt{-1}$ ، $ب + جـ\sqrt{-1}$ ، ... ، $ب + جـ\sqrt{-1}$ التي يمكن فيها اعتبار تخيلات
$ب$ ، $جـ$ ، $ب$ ، $جـ$ ، ... ، $ب$ ، $جـ$ صغيرة بقدر ما يراد ومن هنا يتضح أن
المجموع $1 + \frac{ج}{ع+ك\sqrt{-1}} + \frac{ج}{(ع+ك\sqrt{-1})^2} + \ldots$ يؤول الى مقدار يشبه
كالمقدار $1 + ط + لا\sqrt{-1}$ الذي يمكن فيه اعتبار تخيلين $ط$ ، $لا$ صغيرين
بقدر ما يراد وبناء على ذلك يكون لقياس هذا المجموع $\sqrt{(1+ط)^2 + لا^2}$
مقدار مختلف عن الواحد بقليل غير أن قياس $(ع + ك\sqrt{-1})^م$ لما كان حد
في الزيادة الى غير نهاية كان قياس $ج + ج\sqrt{-1}$ أحد في الزيادة
الى غير نهاية أيضا وحينئذ يثبت المطلوب

ويلزم الآن البرهنة على أن أصغر مقدار للقياس $ج + ج\sqrt{-1}$ يكون
صفرا بأن نثبت أنه اذا كان للقياس $ج + ج\sqrt{-1}$

مقدار مختلف عن الصفر امكن ان يفرض للمتغير س مقدار تخيلي بحيث اذا رمز للناتج بعد وضع هذا المقدار في الطرف الأول من المعادلة بالكمية

ع + ك √−١ حدث ع + ك √−١ ز ع + ك

ولنرمز للمتغير س المطلوب بالكمية ج + ك √−١ + هـ و ونجعل هـ رمزًا لعدد صغير بقدر ما يراد و ي رمزًا لغير معين تفرض له مقادير حقيقية أو تخيلية فلتحصيل الناتج من وضع ج + ك √−١ + هـ و بدل المتغير س في الطرف الاول من المعادلة (١) يستعمل في مبداء الأمر المتغير س بالكمية س + ر ثم يجعل س = ج + ك √−١ ، ر = هـ و

ويمكن بيان الناتج المتحصل من وضع س + ر بدل س في الطرف الاول من المعادلة بالقانون

ص + ص' ر + ص'' / ١×٢ ر^٢ + ص''' / ١×٢×٣ ر^٣ + ... + ص^(ن) ..... (٢)

بجعل ص رمزًا للطرف الاول من المعادلة و ص' و ص'' و ص''' وح^(ن) رموزًا للمشتقات المتوالية لكثيرة الحدود المذكورة

فاذا جعل س = ج + ك √−١ في كثيرة الحدود (٢) آل الحد الأول المذكور ص الى ع + ك √−١ واما مكررات قوى الحد ر في الحدود التالية له فقد يكون بعضها معدومًا إلا انها لا تنعدم جميعًا دفعة واحدة لان مكرر أعلى قوة للحد ر هو الواحد

واذا جعل $\text{ر}'$ رمزًا لاد نى قوة للحد ر الذى مكرره لا يؤول الى الصفر عند جعل $\text{س} = \text{ج} + \text{ك}\sqrt{-1}$ بل أنه يوضع بهذه الصورة وهى $\text{ر}_1 + \text{ف}\sqrt{-1}$

فلا يكون $\text{ر}_1 = 0$ و $\text{ف} = 0$ فى آن واحد

وبمقتضى ذلك اذا جعل $\text{ج}' + \text{ك}'\sqrt{-1}$ رمزًا للمقدار الذى نأخذه الكثيرة الحدود (٢) عند ما يوضع فيها $\text{ج} + \text{ك}\sqrt{-1}$ بدل س و هو بدل ر حدث

$$\text{ج}' + \text{ك}'\sqrt{-1} = \text{ج} + \text{ك}\sqrt{-1} + (\text{ر}_1 + \text{ف}\sqrt{-1})\,\text{هـ}^{\text{و}} \ldots\ldots (3)$$

$$+ (\text{الحدود المشتملة على } \text{هـ}^{1+\text{و}}\,\text{ن}\ \text{هـ}^{2+\text{و}}\,\text{ن} \ldots\ldots \text{ن}\ \text{هـ}^{\text{م}})$$

ويمكن ان يفرض اغير المعين و مقدار بحيث يكون $\text{و} = +1$ أو $\text{و} = -1$

فيحدث $\text{ج}' + \text{ك}'\sqrt{-1} = \text{ج} + \text{ك}\sqrt{-1} \pm (\text{ر}_1 + \text{ف}\sqrt{-1})\,\text{هـ}^{\text{و}} +$

$$(\text{الحدود المشتملة على } \text{هـ}^{1+\text{و}}\,\text{ن}\ \text{هـ}^{2+\text{و}}\,\text{ن} \ldots\ldots \text{ن}\ \text{هـ}^{\text{م}})$$

وبانفصال الاجزاء الحقيقية من الاجزاء التخيلية يحدث

$$\text{ج}' = \text{ج} \pm \text{ر}_1\,\text{هـ}^{\text{و}} + (\text{الحدود المشتملة على } \text{هـ}^{1+\text{و}}\,\text{ن}\ \text{هـ}^{2+\text{و}}\,\text{ن} \ldots\ldots \text{ن}\ \text{هـ}^{\text{م}})\,\text{ن}$$

$$\text{ك}' = \text{ك} \pm \text{ف}\,\text{هـ}^{\text{و}} + (\text{الحدود المشتملة على } \text{هـ}^{1+\text{و}}\,\text{ن}\ \text{هـ}^{2+\text{و}}\,\text{ن} \ldots\ldots \text{ن}\ \text{هـ}^{\text{م}})$$

ومن هنا يؤخذ

$$\text{ج}' + \text{ك}'\sqrt{-1} = \text{ج}' + \text{ك}'\sqrt{-1} \pm (\text{ج}\,\text{ر}_1 + \text{ك}\,\text{ف})\,\text{هـ}^{\text{و}} + (\text{الحدود الحقيقية المشتملة على } \text{هـ}^{1+\text{و}}, \text{هـ}^{2+\text{و}}, \ldots, \text{هـ}^{\text{م}})$$

ويمكن أن يفرض للعدد هـ مقدار صغير بالكفاية بحيث يكون مجموع الحدود المشتملة على قوى هـ في مقدار $ج^{٢}+ك^{٢}$ متحدًا في العلامة مع الحد $\pm (ج_{١}+ك_{١}ف)\,هـ^{٢}$ (كما تقدم في بند ٢٧) ويمكن زيادة على ذلك أن يكون هذا الحد سالبًا لانه يكفي لذلك تعيين غير المعين و على وجه بحيث يكون $هـ^{٢}$ مساويًا +١ أو −١ بحسب ما تكون الكمية $ج_{١}+ك_{١}ف$ سالبة أو موجبة فاذا تحققت جميع هذه الشروط تحصل

$$ج^{٢}+ك^{٢} < (ج+ك)^{٢} \text{ ومنها ينتج } \sqrt{ج^{٢}+ك^{٢}} < \sqrt{ج+ك}$$

وحيث فرض أن الكمية $ج_{١}+ك_{١}ف$ ليست معدومة فيلزم ايضًا اختبار الحالة التي تكون فيها الكمية $ج_{١}+ك_{١}ف=٠$. وذلك بأن يفرض لغير المعين في المعادلة (٣) عوضًا عن أن يجعل فيها $هـ=\pm ١$ مقدار به يكون $هـ=\pm\sqrt{-١}$ وحينئذ ينتج أن $ج^{٢}+ك^{٢}\sqrt{-١}=ج+ك\sqrt{-١}\pm(ج_{١}+ف\sqrt{-١})\,هـ\sqrt{-١}+خ$ ومن هنا يحدث

$$ج^{٢}=ج\mp ف\,هـ+خ \quad \text{و} \quad ك^{٢}=ك\pm ج_{١}\,هـ+خ$$

وبناء على ذلك يحصل

$$ج^{٢}+ك^{٢}=ج+ك\pm(ك_{١}-ج_{١}ف)\,هـ+خ$$

وحينئذ يرى ان الحدود التالية للحد $هـ^{٢}$ حقيقية ومحتوية على قوى

للحد هـ بأس يزيد عن ح

وحيث انه قد فرض أن ح ر + ك ف = ٠ فلا يخص غير ك ر - ح ف = ٠

لانه ان كانت كلتا المتساويتين تساوى صفرًا حدث

(ح ر + ك ف)² + (ك ر - ح ف)² = ٠ أو (ح² + ك²) (ر² + ف²) = ٠

وبناءً عليه يكون ح² + ك² = ٠ أعنى ح = ٠ و ك = ٠ أو ر² + ف² = ٠

أى ر = ٠ و ف = ٠ وهذا مخالف للفروض المتقدمة

ولما كانت الكمية ك ر - ح ف ليست معدومة أمكن فرض العدد هـ

صغيرًا بالكفاية ليكون مجموع الحدود المشتملة على قوى الحد هـ فى مقدار

ح² + ك² متحدًا فى العلامة مع الحد الأول الذى هو

± ٢ (ك ر - ح ف) هـ ويمكن ايضًا ان يكون هذا الحد سالبًا لانه يكفى

لذلك أن يعين و على وجه بحيث يكون و = + √-١ أو - √-١

بحسب ما تكون الكمية ك ر - ح ف سالبة أو موجبة فاذا تحققت

جميع هذه الشروط فانه يحدث

$$\sqrt{ح^2 + ك^2} < \sqrt{ح^2 + ك^2}$$

في مضاريب المعادلات وقواسمها

النظرية السادسة

بند ٢٣٦ اذا كان ح هو الجذر الحقيقي لمعادلة كالمعادلة ص = ٠ فان الطرف الاول من المعادلة يكون قابلاً للقسمة على الكمية ذات الحدين س − ح ولذا نقسم الكمية الكثيرة الحدود ص على س − ح وحيث أن المقسوم عليه يحتوي على س بدرجة اولى فقط فنتوصل بالعمل الى باقٍ لا يحتوي على هذا المتغير ولا يكون مقام خارج القسمة محتويًا على المتغير س المذكور فاذا رمز لخارج القسمة بالرمز خ وللباقي بالرمز ق حدث

ص = (س − ح) × خ + ق

وفي هذه المتساوية اذا جعل س = ح انعدم طرفها الأول وحيث أنه قد فرض أن ح هو جذر المعادلة ص = ٠ فينعدم حاصل الضرب (س − ح) خ أيضًا لان المضروب س − ح قد آل الى الصفر ولا يمكن أن يكون المضروب خ غير معدوم وأما الباقي ق فانه لم يتغير لانه ليس داخلاً في س فاذًا يكون هذا الباقي معدومًا واذًا تكون الكمية ص الكثيرة الحدود قابلة للقسمة على س − ح

التنبيه الثاني

اذا كانت الكمية ذات الحدين س - ح تقسم الكمية الكبرى المحدود س كان ح جذراً للمعادلة س = ٠ لانه قد فرض أن س = (س - ح) ق وحينئذ الخارج ق تام بالنسبة الى س فاذا جعل في هذه المساوية س = ح فالطرف الثاني يعدم وحينئذ يؤول الطرف الأول الى الصفر

التنبيه الثاني

واذا جعل س = ح في طرفي المساوية س = (س - ح) ق + ف فإن الحاصل (س - ح) ق يؤول الى الصفر والباقي ف لا يتغير على أي وجه كان مقدار الكمية ح ومن هنا يؤخذ أن الباقي ف يكون مساوياً للمقدار الذي تحصل الكمية الكبرى المحدود س عندما يوضع فيها ح بدل س ولا شك أن هذه مقدمة تتفرع على النظرية السادسة لانه اذا كان ح هو الجذر للمعادلة س = ٠ كان الناتج بعد وضع ح بدل س في س صفراً وحينئذ يكون باقي قسمة س على س - ح صفراً ايضاً وبناء على ذلك تكون الكمية الكبرى المحدود س قابلة للقسمة على س - ح

وقد برهن المهندس لاجرانج على النظرية السادسة المذكورة بهذه البرهنة وهي اذا فرض أن المعادلة العمومية هي

(١) $\text{س}^{\text{م}} + \text{ج}\,\text{س}^{\text{م}-١} + \text{ج}\,\text{س}^{\text{م}-٢} + \dots\dots\dots + \text{ج}_{\text{م}-١}\,\text{س} + \text{ج}_{\text{م}} = ٠$

وكان ح هو الجذر لهذه المعادلة تحصل من ذلك المتساوية

$\text{ح}^{\text{م}} + \text{ج}\,\text{ح}^{\text{م}-١} + \text{ج}\,\text{ح}^{\text{م}-٢} + \dots\dots + \text{ج}_{\text{م}-١}\,\text{ح} + \text{ج}_{\text{م}} = ٠$

فاذا استخرج من هذه المتساوية مقدار $\text{ج}_{\text{م}}$ ووضع في الطرف الأول من المعادلة (١) آلت كثيرة الحدود المفروضة الى

$\text{س}^{\text{م}} + \text{ج}\,\text{س}^{\text{م}-١} + \text{ج}\,\text{س}^{\text{م}-٢} + \dots\dots + \text{ج}_{\text{م}-١}\,\text{س}$

$- \text{ح}^{\text{م}} - \text{ج}\,\text{ح}^{\text{م}-١} - \text{ج}\,\text{ح}^{\text{م}-٢} - \dots\dots - \text{ج}_{\text{م}-١}\,\text{ح}$ أو

$\text{س}^{\text{م}} - \text{ح}^{\text{م}} + \text{ج}(\text{س}^{\text{م}-١} - \text{ح}^{\text{م}-١}) + \text{ج}(\text{س}^{\text{م}-٢} - \text{ح}^{\text{م}-٢}) \dots + \text{ج}_{\text{م}-١}(\text{س} - \text{ح})$

لكن حيث أن س − ح يقسم كلا من الكميات $\text{س}^{\text{م}} - \text{ح}^{\text{م}}$ و $\text{س}^{\text{م}-١} - \text{ح}^{\text{م}-١}$ و الخ فيكون الطرف الأول من المعادلة (١) قابلاً للقسمة على س − ح ايضاً بسهولة ويكفي لتحصيل خارج القسمة أن تقسم كل من الكميات ذات الحدين $\text{س}^{\text{م}} - \text{ح}^{\text{م}}$ و $\text{س}^{\text{م}-١} - \text{ح}^{\text{م}-١}$ و الخ على س − ح وأن تجمع الخوارج الجزئية على بعضها بضرب خارج القسمة الجزئي الثاني في ج والثالث في $\text{ج}_{٢}$ و الخ فيتحصل

$\text{س}^{م-1} + \text{ح}$	$\text{س}^{م-2} + \text{ح}^2$	$\text{س}^{م-3} + \text{ح}^3$	$\text{س}^{م-4} \dots + \text{ح}^{م-1}$
$+ \text{ج}_1$	$+ \text{ج}_1 \text{ح}$	$+ \text{ج}_1 \text{ح}^2$	$\dots + \text{ج}_1 \text{ح}^{م-2}$
	$+ \text{ج}$	$+ \text{ج} \text{ح}$	$\dots + \text{ج} \text{ح}^{م-3}$
		$+ \text{ج}_2$	$\dots + \text{ج}_2 \text{ح}^{م-4}$
			$\dots + \dots$
			$\dots + \dots$
			$+ \text{ح}^{م-1}$

ومن هنا يشاهد أن مكرر كل حد من خارج القسمة يتحصل بالابتداء من الحد الثانى بأن يضرب مكرر الحد السابق عليه فى ح ويضاف الى حاصل الضرب المكرر الذى يشغل فى كثيرة الحدود $\text{س} + \text{ج}$ $\text{س}^{-1} + \text{ج}$ مرتبة الحد الذى يراد تحصيله من خارج القسمة ومكرر الحد الأول من خارج القسمة لا يختلف عن مكرر الحد الأول من كثيرة الحدود المفروضة

بند ٢٨ ويمكن ايضاً أن ينبه مهما كانت الكمية ح على أن الطرف الأول من المعادلة (١) يكون دائماً مكافئاً للمقدار

$$\text{س}^{م} - \text{ح}^{م} + \text{ج}_1 (\text{س}^{م-1} - \text{ح}^{م-1}) + \text{ج}_2 (\text{س}^{م-2} - \text{ح}^{م-2}) \dots + \text{ج}_{م-1} (\text{س} - \text{ح})$$

$$+ \text{ح}^{م} \qquad + \text{ج}_1 \text{ح}^{م-1} \qquad + \text{ج}_2 \text{ح}^{م-2} \dots + \text{ج}_{م-1} \text{ح} + \text{ج}_م$$

وحيث أن هذا المقدار الأخير يكون من جزئين أحدهما قابل للقسمة على س - ح والثانى غير محتو على س فيكون هذا الجزء الثانى كناية عن باقى قسمة الكمية الكثيرة الحدود المفروضة على س - ح وحينئذ فقد آلت هذه النتيجة الى المقدمة فى النتيجة الثانية وبالجملة يمكن هنا ايراد القواعد المقررة فى البنود الثلاثة السابقة وذلك بأن نجرى بمقتضى الطرق المعتادة عملية قسمة الكمية الكثيرة الحدود $\text{ك}_{\text{ن}} + \text{ج}\ \text{ك}_{\text{ن}-١}\ \text{س} + \text{ج}\ \text{ك}_{\text{ن}-٢}\ \text{س}^{٢} + \text{لخ}$ على الكمية ذات الحدين س - ح

النظرية السابعة

بند ٣٩ أى معادلة ذات درجة ميمية لها دائماً جذور حقيقية أو تخيلية لا تزيد عن درجتها الميمية مثلاً اذا فرضت المعادلة $\text{ص} = ٠$ نشهد أن لها بالضرورة جذراً حقيقياً أو تخيلياً فاذا رمز اليه بالرمز ج كان الطرف الأول قابلاً للقسمة على س - ح والخارج كمية كثيرة الحدود درجتها ن - ١ وحينئذ يكون

$$\text{ص} = (\text{س} - \text{ج})(\text{ك}_{\text{ن}-١}\ \text{س}^{\text{ن}-١} + \text{لخ})$$

فاذا جعلت الكمية الكثيرة $\text{ك}_{\text{ن}-١}\ \text{س}^{\text{ن}-١} + \text{لخ}$ مساوية للصفر فانه يتحصل

من

من ذلك معادلة يكون لها جذر كالجذر ء وحينئذ تكون الكمية الكثيرة الحدود قابلة للقسمة على س - ء ويكون الخارج كمية كثيرة الحدود درجتها م - ١ وبناء على ذلك يحدث

$$\text{ص} = (\text{س} - \text{ح})(\text{س} - \text{ء})(\text{س}^{\text{م}-٢} + \text{لخ})$$

فاذا جعلت الكمية الكثيرة الحدود $\text{س}^{\text{ش}} + \text{لخ}$ مساوية للصفر فانه يتحصل من ذلك معادلة يكون لها جذر كالجذر هـ وحينئذ تكون الكمية الكثيرة الحدود المذكورة قابلة للقسمة على س - هـ ويكون خارج القسمة كمية كثيرة الحدود درجتها م - ٢ وبناء على ذلك يكون

$$(\text{س} - \text{ح})(\text{س} - \text{ء})(\text{س} - \text{هـ})(\text{س}^{\text{م}-٣} + \text{لخ})$$

ويمكن أن يتوالى العمل هكذا حتى لا يكون الخارج محتويا على المتغير س الا بدرجة اولى ويكون كمية ذات حدين كالكمية س - ك وحينئذ تتحلل الكمية الكثيرة الحدود المفروضة الى مضاريب بدرجة اولى عددها م وبناء على ذلك يحدث

$$\text{ص} = (\text{س} - \text{ح})(\text{س} - \text{ء})(\text{س} - \text{هـ})\ldots(\text{س} - \text{ك})$$

وبمقتضى هذا التحليل يشاهد أن الكمية الكثيرة الحدود ص تؤول الى الصفر اذا وضع فيها بدل المتغير س واحد من المقادير ح، ء، هـ ... ، ك

التي عددها م وبناء على ذلك يكون للمعادلة س = ٠ جذور عددها م

ولا يكون لها جذور غير الجذور ح ، ء ، هـ ، ..... ، ك التي عددها م

لانه ان كان لها غير هذه الجذور أمكن تحليل الكمية الكثيرة الحدود س

الى جمل من المضاريب التي بدرجة اولى وهذا محال (كما في بند ٢١٧)

ويمكن أن تكون بعض المضاريب س - ح ، س - ء ، س - هـ ، الخ متساوية

وفي هذه الحالة تكون جذور المعادلة س = ٠ متساوية مثلاً اذا كانت

الكمية الكثيرة س محتوية على ثلاثة مضاريب كل واحد منها يساوي

س - ح فان كل واحد من جذورها الثلاثة يكون مساوياً للمضروب

ح ولذا يقال أن أي كمية درجتها م يكون لها جذور عددها م

بند ٢١٩ ويمكن البرهنة بقطع النظر عن النظرية المتقدمة (في بند ٢١٧) على

أن أي معادلة بدرجة م لا يكون لها جملة واحدة من الجذور عددها م

مثلاً لنفرض المتساوية

س = (س - ح)(س - ء)(س - هـ) .... (س - ك)

فاذا فرض فيها للمتغير س مقدار كالمقدار ل مختلف عن كل واحدة

من الكميات ح ، ء ، هـ ، ..... ، ك يقال حيث انه لا ينعدم أي مضروب

من مضاريب الطرف الثاني فلا ينعدم حاصل ضرب هذه المضاريب

وحينئذ

وحينئذٍ لايكون ل جذرًا للمعادلة س = ٠ فان وجد لها جذور متساوية

بحيث يكون س = (س − ح)^م (س − ى)^ع ك فلا تكون الكمية الكثيرة

الحدود س مساوية لأى حاصل ضرب مكون من مضاريب واحدة

ذات أسس متنوعة لانه ان أمكن ذلك وفرض أن

(س − ح)^م (س − ى)^ع ك = (س − ح)^م' (س − ح)^ع' ك

وكان م > م' فبقسمة الطرفين على (س − ح)^م' يحدث

(س − ح)^م (س − ى)^ع ك = (س − ى)^ع' ك

وحينئذٍ يؤول الطرف الأول من المتساوية الأخيرة الى الصفر بمقتضى

الفرض س = ح ولا يتأتى ذلك فى الطرف الثانى لان كلاًّ من مضاريبه

مختلف عن س − ح وحينئذٍ تكون المتساوية غير ممكنة

وبناء على ذلك لايكون لأى معادلة درجتها م غير جملة واحدة من

جذور عددها م متساوية أو غير متساوية

بند ٢٤١ فاذا جعل س رمزًا للدلالة تامة للكمية س التى درجتها م

ووُفِّق بين مضاريبها الدرجة الأولى من هذه الدلالة بضربها فى

بعضها مثنى وثلاث فان حواصل الضرب المتحصلة من ذلك تكون

كلها قاسمة للدلالة س ويشاهد بمقتضى النظرية الثانية المقررة

(ف ب ج) أن الكمية الكثيرة الحدود تنحل أيضاً على القواسم الناتجة من هذه التوافق وحينئذ يكون عدد قواسم الدرجة الثانية س $\frac{م(م-١)}{١ \times ٢}$ وعدد قواسم الدرجة الثالثة $\frac{م(م-١)(م-٢)}{١ \times ٢ \times ٣}$ س ج

النظرية الثامنة

ب ج ذا كان لمعادلة حقيقية المكررات جذر تخيلي كالجذر ل + ى $\sqrt{-١}$ فانه يكون لها أيضاً جذر كالجذر ل - ى $\sqrt{-١}$

فاذا وضع ل + ى $\sqrt{-١}$ بدل س في الطرف الأول من هذه المعادلة فان الحدود المحتوية على الكمية ى $\sqrt{-١}$ المرفوعة الى قوة زوجية تكون مجردة عن الدلالة التخيلية $\sqrt{-١}$ وهذه الدلالة تكون باقية على حالها في سائر الحدود المحتوية على الكمية ى $\sqrt{-١}$ المرفوعة الى قوة فردية بحيث اذا رمز للناتج بعد الوضع بالرمز ج + ك $\sqrt{-١}$ كانت ج و ك كميتين حقيقيتين والكمية ج محتوية على قوى زوجية فقط للكمية ى والكمية ك على قوى فردية للكمية ى المذكورة

فاذا وضع في المعادلة المذكورة ل - ى $\sqrt{-١}$ بدل س فان الناتج المتحصل لا يختلف عن المتقدم الا باختلاف علامات القوى الفردية للكمية ى وحينئذ يوضع الناتج المذكور هكذا ج - ك $\sqrt{-١}$

لكن حيث

لكن حيث أن ل + ى = √−١ جذر للمعادلة المفروضة فإنه يلزم أن

المقدار ح + ك √−١ مساويًا للصفر أيضًا ويؤخذ أن ح = ٠ ،

ك = ٠ فإذا يكون ح − ك √−١ مساويًا أيضًا للصفر وإذا يكون

ل − ى √−١ جذرًا للمعادلة .

نتيجة أولى

الجذور التخيلية يكون عددها زوجيًا في معادلة مكونة من

حقيقية

نتيجة ثانية

المضاريب المطابقة للجذور التخيلية في معادلة مكونة حقيقية

تحصل منها مضاريب حقيقية حتى في حالة كونها من درجة ثانية

لأنه إذا كان المضروبان المطابقان لجذرين تخيليين هما س − (ل + ى √−١)

و س − (ل − ى √−١) كان حاصل ضرب هذين المضروبين هو

(س − ل)² + ى² أو س² − ٢ل س + ل² + ى²

ومن هنا يؤخذ أن الطرف الأول من معادلة زوجية الدرجة وغير ذات

المكررات يتحلل دائمًا إلى مضاريب حقيقية بدرجة ثانية

إذا كانت المعادلة فردية الدرجة كان لها بالضرورة مضروب

حقيقي بدرجة اولى (كما في بند ٤٣١) وبقسمتها على هذا المضروب تؤول الى معادلة زوجية الدرجة .

في الارتباطات الواقعة بين مكررات المعادلة وجذورها

النظرية التاسعة

بند ٤٤٣ حيث أنّ مكرر اعلى قوة للمجهول هو الواحد في المعادلة المحولة الى الصورة

$$س^{ن} + جـ س^{ن-١} + د س^{ن-٢} + هـ س^{ن-٣} + \dots + ك = ٠$$

فيكون مكرر الحد الثاني المأخوذ بعلامة مخالفة لعلامته مساويًا لمجموع الجذور ومكرر الحد الثالث مساويًا لمجموع حواصل ضرب الجذور مأخوذة مثنى ومكرر الحد الرابع المأخوذ بعلامة مخالفة لعلامته مساويًا لمجموع حواصل ضرب الجذور مأخوذة ثلاث ومكرر الحد الأخير المأخوذ بعلامته ان كانت درجة المعادلة زوجية وبعلامة مخالفة لعلامته ان كانت درجتها فردية مساويًا لحاصل ضرب جميع الجذور

مثلاً اذا جعلت ح ، د ، هـ ، .... ك رموز الجذور معادلة عددها ن فيكون طرفها الأول مساويًا لحاصل الضرب

$$(س - ح)(س - د)(س - هـ) \dots\dots (س - ك)$$

وحيث

وحيث تقدم أن حاصل الضرب المشتمل على مضاريب عددها ن كالمضاريب

س + جـ ، س + د ، س + هـ ، الخ يكون فيه مكور $س^{ن-١}$ هو مجموع كميات .

جـ ، د ، هـ ، الخ ومكور $س^{ن-٢}$ هو مجموع حواصل ضرب هذه الكميات مأخوذة

مثنى ومكور $س^{ن-٣}$ هو مجموع حواصل ضرب هذه الكميات مأخوذة ثلاث

وهكذا الى مكور الحد الأخير الذي يكون مساويًا لحاصل ضرب سائر هذه

الكميات فيمكن للانتقال من حاصل ضرب المضاريب س + جـ ، س + د ، الخ

الى حاصل ضرب المضاريب س - جـ ، س - د ، الخ أن تغير علامات الكميات

جـ ، د ، هـ ، الخ فتتغير علامات الحواصل المحتوية على هذه الكميات الداخلة

فيها بعدد فردي وتبقى الحواصل المحتوية عليها بعدد زوجي بعلامتها

وحينئذ يثبت المطلوب وهذه الارتباطات التي عددها كدرجة المعادلة لا يمكن

أن تستخرج منها جذور المعادلة لانه يتوصل بواسطة حذف الجذور واحدًا بعد واحد

الى معادلة لا تختلف عن المعادلة المفروضة الا بكون أحد الجذور داخلًا فيها بدل س وتنعدم المعادلة ذات الدرجة الثالثة

$س^{٣} + جـ س + د س + هـ = ٠$

فاذا جعلت جـ ، د ، هـ رموزًا للجذور الثلاثة فانه يحصل بمقتضى

النظرية السابقة المعادلات الثلاث

$-جـ - د - هـ = جـ ، جـ د + جـ هـ + د هـ = د ، -جـ د هـ = هـ$

وأسهل طريقة تستعمل في حذف ء و هـ من بين هذه المعادلات هي أنها نجمع على بعضها بعد أن تضرب المعادلة الاولى في $ح^{٢}$ والثانية في ح فتحصل من ذلك المعادلة

$$ح^{٣} + جـ ح^{٢} + ء ح + هـ = ٠$$

وهذه المعادلة لا تختلف عن المعادلة المتقدمة الا بوضع ح بدل س وحينئذ يؤخذ من التوضيحات السابقة أنه يتوصل دائماً الى معادلة لا تختلف عن المعادلة المفروضة على اي وجه كانت طريقة الحذف

في تحويل المعادلات

يفيد من المفيد في الغالب لسهولة تعيين جذور معادلة ان يجري على هذه المعادلة بعض تحويلات الغرض منها أن تضاف الى كل من جذور معادلة أو تطرح منها كمية أو تضرب في كمية أو تقسم عليها

مثلاً اذا فرضت المعادلة

$$س^{ن} + جـ س^{ن-١} + ء س^{ن-٢} + \dots\dots + ك = ٠ \quad \dots\dots (١)$$

فلتحويل هذه المعادلة الى اخرى تكون جذورها مساوية لجذور هذه المعادلة مضافاً اليها كمية يفرض أن

$$ص = س + ر \quad \text{فيكون} \quad س = ص - ر$$

ويوضع

وبوضع ص - ر بدل س فى المعادلة (١) تتحصل المعادلة المطلوبة لانه يحدث بعد الاستبدال

$$(ص - ر)^{م} + جـ (ص - ر)^{م-١} + ء (ص - ر)^{م-٢} + \cdots + ك = ٠ \quad \ldots\ldots (٢)$$

وهذه المعادلة تحقق بالشرط المفروض لان الناتج الحادث من وضع حـ بدل س فى المعادلة (١) لا يختلف عن الناتج الحادث من وضع حـ + ر بدل ص فى المعادلة (٢) وبناء على ذلك اذا كان حـ جذرًا من جذور المعادلة الاولى كان حـ + ر جذرًا من جذور المعادلة الثانية

ويمكن ايضًا التوصل الى هذا الناتج بواسطة وضع الطرف الأول من المعادلة على صورة حاصل ضرب مضاريب بدرجة اولى لانه اذا فرض أن حـ ، ء ، هـ ، .... ك هى الجذور كان الطرف الأول المذكور مكافئًا لحاصل الضرب

$$(س - حـ)(س - ء)(س - هـ) \cdots (س - ك)$$

فاذا وضع س - ر بدل س فان هذا الحاصل يتحول الى

$$[ص - (حـ + ر)][ص - (ء + ر)][ص - (هـ + ر)] \cdots [ص - (ك + ر)]$$

وحينئذ تكون جذور المعادلة المحولة بعد الاستبدال هى حـ + ر ، ء + ر ، ... ، ك

بيد فاذا اريد تنقيص جميع جذور المعادلة (١) بكمية واحدة فان ذلك لا يختلف عما نحن بصدده الا بشئ واحد وهو أن ر تكون كمية سالبة وحينئذ اذا وضعت هذه الكمية بالصورة −ر آلت المعادلة المذكورة بعد التحويل الى

$$(\text{ص}+\text{ر})^{\text{م}}+\text{ج}(\text{ص}+\text{ر})^{\text{م}-1}+\text{ء}_1(\text{ص}+\text{ر})^{\text{م}-2}+\dots+\text{ك}_1=\dots\dots(3)$$

وهذا التحويل يستعمل في تغيير معادلة بأخرى لا تكون محتوية على قوة معينة للمجهول وبتحليل القوى المتنوعة للكمية ذات الحدين ص + ر في المعادلة (٢) تؤول هذه المعادلة الى

$$\left.\begin{array}{l}\text{ص}+\text{م ر}\\ +\text{ج}\end{array}\right|\begin{array}{l}\text{ص}^{\text{م}-1}+\frac{1}{2}\text{م}(\text{م}-1)\text{ر}\\ +(\text{م}-1)\text{ج ر}\\ +\text{ء}_1\end{array}\left|\begin{array}{l}\text{ص}^{\text{م}-2}+\dots+\text{ر}^{\text{م}}\\ +\text{ج ر}^{\text{م}-1}\\ +\text{ء}_1\text{ر}^{\text{م}-2}\\ +\\ \vdots\\ \text{ك}_1\end{array}\right\}=0$$

واذا اريد جعل هذه الكمية غير محتوية على القوة م−١ للمتغير ص فانه يلزم أن يكتب م ر + ج = ٠ ومن هنا ينتج ر = −$\frac{\text{ج}}{\text{م}}$ وحينئذ يؤول القانون س = ص + ر الى

س =

$$س = ص - \frac{ج}{م}$$

وعلى ذلك يلزم لتحويل معادلة الى اخرى تنقص عنها بالحد الثانى أن يوضع بدل المجهول س مجهول آخر ص يضاف اليه المكور ج من الحد الثانى فى المعادلة المفروضة مأخوذاً بعلامة مخالفة لعلامته ومقسوماً على درجة المعادلة فتكون جذور المعادلة المحولة مساوية لجذور المعادلة المفروضة مضافاً اليها $\frac{ج}{م}$

ويسهل بواسطة الخواص المقررة فى شأن تركيب المكررات مع الجذور توضيح القاعدة السابقة لان الجذور اذا اضيف اليها $\frac{ج}{م}$ زاد مجموعها بمقدار م × $\frac{ج}{م}$ أى بمقدار ج وحيث أن هذا المجموع كان يساوى فى مبدأ الأمر −ج فيكون مجموع جذور المعادلة الجديدة مساوياً للصفر وبناء على ذلك يكون مكور الحد الثانى معدوماً

واذا اريد حذف الحد الثالث من المعادلة (٤) يجعل مكون مساوياً للصفر فتكون من ذلك معادلة بدرجة ثانية يؤخذ منها مقداران للكمية ر واذا حذف الحد الرابع تحصلت من ذلك معادلة بدرجة ثالثة وهكذا واذا حذف الحد الأخير كانت المعادلة التى يطلب حلها مشابهة للمعادلة المفروضة

وهذا واضح لانه متى انعدم الحد الأخير من المعادلة (٤) كان أحد جذور هذه المعادلة مساويًا للصفر وحيث أن هذه الجذور هي عين جذور المعادلة المفروضة مطروحًا من كل واحد منها ر فلكي ينعدم أحدها يلزم ان تكون القيمة ر المذكورة جذرًا من جذور المعادلة المفروضة

سند ٤٤٦ ولنمثل لحذف الحد الثاني بمثال هو لتفرض المعادلة

س^٥ + ٥ س^٤ + س^٣ - ١٦ س^٢ - ٢٠ س - ١٦ = ٠ ..... (٥)

ثم يوضع فيها ص - ١ بدل س فتتحول الى المعادلة

ص^٥ - ٩ ص^٣ + ص^٢ - ٩ = ٠

وهذه المعادلة يمكن وضعها بالصورة

(ص^٢ - ٩) (ص^٣ + ١) = ٠

وحينئذ يشاهد انها قد انقسمت الى جزئين هما

ص^٢ - ٩ = ٠ و ص^٣ + ١ = ٠

فأما الجزء الأول فيحصل منه ص = + ٣ و ص = - ٣ وأما الثاني فيحدث منه بمقتضى ما تقدم في (سند ١٥٤)

ص = - ١ و ص = ½ (١ + √-٣) و ص = ½ (١ - √-٣)

ومن هنا يؤخذ أنه يكون للمعادلة (٥) ثلاثة جذور اثنان منها تخيليان

وهذه الجذور تكتب بعد تعيين قانون س = ص ، فكذا

س = ٢ ، س = -٢ ، س = ٠ ، س = [illegible] ، س = ½ (-١ ± √-٣)

وحينئذٍ يشاهد انه قد حذف من المعادلة المحولة كل من الحدين في ص

لكنه لا يمكن في جميع الأحوال حذف عدة حدود من معادلة وفرة احدة بمجرد

حذف واحد من حدودها كما ذكرنا من المعادلة المحدودة واريد حذف

أحد الحدود موجودة [illegible] المعادلة المحولة [illegible]

ويلزم تحويل [illegible] بذور [illegible] او بقية بذور هذه

المعادلة مضروبة في قيمة [illegible] فيكون [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

فان كان م دالاً على عدد زوجي فانه يترتب على وضع ـ ص بدل
س تغيير علامات سائر الحدود الزوجية المرتبة بالابتداء من
الحد الأول أما الحدود الفردية المرتبة فلا تتغير علاماتها وان كان
م دالاً على عدد فردي فانه يترتب على ذلك تغيير علامات الحدود
الفردية المرتبة أما الحدود الزوجية فلا تتغير علاماتها وحينئذ
يلزم لكي يكون الحد الأول موجباً ان تغير علامات سائر الحدود في
المعادلة الناتجة وينتج من ذلك أن تغيير علامات جذور معادلة
بعد ان توضع فيها لتصير تامة الحدود الناقصة منها
ويجعل الصفر مكرراً لكل واحد من هذه الحدود لا يحصل
الا بتغيير علامات الحدود الزوجية المرتبة فقط
وبيد اذا كانت جميع حدود المعادلة المحولة الى الصورة الاعتيادية
متحدة في العلامة فلا تكون محتوية على جذر موجب لانه يحدث
من وضع مقدار موجب بدل س في الطرف الأول من المعادلة جملة
من الكميات الموجبة لا يمكن أن تكون معدومة
بهذه الملحوظة يؤخذ منها هي والقاعدة المقررة في شأن تغيير
علامات الجذور ان المعادلة التامة التي تكون حدودها موجبة وسالبة

[illegible]

[illegible]

[illegible]

فاذا كان كل اثنين من جذور معادلة متساويين ومتخالفين في العلامة فان المعادلة لا تشتمل الا على قوى زوجية للمجهول ولذا يقال حيث أن الجذور مبينة هكذا

+ح و − ح و + د و − د و + هـ و − هـ و الخ

فيكون الطرف الأول من المعادلة كناية عن حاصل ضرب المضاريب

س − ح و س + ح و س − د و س + د و س − هـ و س + هـ و الخ

المساوى لحاصل ضرب المضاريب ذات الدرجة الثانية

س² − ح² و س² − د² و س² − هـ² و الخ

ولما كانت هذه المضاريب لا تحتوى الا على قوى زوجية للمجهول س كان حاصل ضربها كذلك

ـــ ٣ قاعدة العلامات لمعلم ديكارت ـــ

بينه اذا فرضت جملة حدود مسبوقة بالعلامتين + و − أطلق على تغيير العلامات لحاصل من حد الى تاليه اسم المغايرة واذا لم يقع على حدين متواليين تغيير في العلامة اطلق على ذلك اسم المداومة مثلاً لمعادلة

س⁵

$$س^٦ - ٣ س^٤ - ٢ س^٣ + س^٢ - س - ١ = ٠$$

تحتوى على ثلاث مغايرات هى واحدة بين الحد الأول والثانى وواحدة بين الثالث والرابع وواحدة بين الرابع والخامس وعلى مداومتين احداهما بين الحد الثانى والثالث والاخرى بين الخامس والسادس

ومن البديهى فى كل معادلة تامة ان عدد المغايرات والمداومات يساوى درجة هذه المعادلة

والنظرية المعروفة بقاعدة العلامات للعلم ديكارت لا تخرج عن هذه النظرية

النظرية العاشرة

بند ٢٥١ لا يلزم فى كل معادلة تامة أو غير تامة ان عدد الجذور الموجبة يزيد عن عدد المغايرات

فاذا فرض فى مبداء الأمر أنه قد تحصل حاصل ضرب المضاريب المطابقة لكل من الجذور التخيلية والسالبة للمعادلة فانه يلزم لتحصيل الطرف الأول من هذه المعادلة ان يضرب على التوالى الحاصل المذكور فى جميع المضاريب المطابقة للجذور الموجبة وحينئذ لا تتحقق هذه النظرية الا اذا شوهد عند ضرب كمية كثيرة الحدود فى مضروب كالمضروب

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] هو الحد الأخير تكون كل الحدود في الصورة

وبضرب هذه الكمية الكثيرة الحدود المفروضة [illegible]

يحدث

$س^{ن+1} - ج$	$س^{ن-2+1} \ldots + ع$	$س^{ن-3+1} \ldots \pm ك$	$س^{ن-ل+1} \ldots \mp ر$
$-$	$+$	$\pm$	$\mp$

$س^{ن+1} - ج\,س^{ن-2+1} \ldots + ع\,س^{ن-3+1} \ldots \pm ك\,س^{ن-ل+1} \ldots \mp ر$

فبمقتضى

فمقتضى ما تقرر شأن درجات المضروب تكون حدود حاصل الضرب الكلية الكثيرة الحدود في ـ ح المحتوية على المجهول س بالأسس م ـ ح + ١ ، م ـ ح + ٢ ، م ـ ك + ١ بنظم تكن معدومة متحدة في العلامة مع الحدود المحتوية على س بهذه الأسس في حاصل ضرب المضروب في س وبناء على ذلك تكون الحدود المحتوية على المجهول س بهذه الأسس في حاصل الضرب الكلي متحدة في العلامة أيضاً

اذا تقرر هذا نشاهد أنه يوجد في المضروب مغايرة واحدة من الحد الأول س^م الى الحد ـ ح س^{م ـ ح} وانه يوجد في حاصل الضرب بالأقل مغايرة واحدة من الحد الأول س^{م + ١} الى الحد ـ ح س^{م ـ ح + ١} لان هذين الحدين متخالفان في العلامة وكذا لا يوجد في المضروب الا مغايرة واحدة من الحد ـ ح س^{م ـ ح} الى الحد + ح س^{م ـ ن} ويوجد في حاصل الضرب بالأقل مغايرة واحدة بين الحدين ـ ح س^{م ـ ح + ١} ن + ح س^{م ـ ح + ١} ومن هنا يرى أن عدد المغايرات الذي يوجد في حاصل الضرب الى الحد ± ك س^{م ـ ك + ١} يكون بالأقل مساوياً لعدد المغايرات الذي يوجد في المضروب الى الحد

+ ك ن م-ك+١ لكنه لا يوجد بالابتداء من هذا الحد في المضروب مغايرة ما واما حاصل الضرب فانه يوجد فيه من ابتداء الحد ك ن م-ك+١ الى الحد الأخير ج ر ح مغايرة واحدة بالأقل وبناء على ذلك تكون المغايرات الموجودة في حاصل الضرب اكثر من المغايرات الموجودة في المضروب ولو بمغايرة واحدة

بند ٢٥٤ اذا تحصل من عملية الضرب في مضروب واحد مطابق لجذر موجب عدة مغايرات فلا يكون عددها الا فرديًا لانه اذا فرض في مبداء الأمر أن الحد الأخير من المضروب مسبوق بعلامة + لزم ان تغيرت علامات الفرق أن يكون عدد التغيرات زوجيًا اعني أن عدد المغايرات الموجودة في المضروب يكون صفرًا او عددًا زوجيًا فيكون عدد المغايرات الموجودة في حاصل الضرب فرديًا واذا كان الحد الأخير من المضروب المذكور مسبوقًا بعلامة - كان عدد المغايرات الموجودة في الكمية الكبيرة الحدود المفروضة فرديًا وفي هذه الحالة يكون الحد الأخير من حاصل الضرب مسبوقًا بعلامة + ويكون عدد مغايراته زوجيًا وبناء على ذلك يكون عدد مغايرات سلسلة الضرب مختلفًا دائمًا عن عدد مغايرات المضروب بعدد فردي

ويشاهد

ويشاهد ايضًا بمقتضى النظريتين المقررتين (في بندى ١٣٠ ، ١٣١)
انه يلزم ان يكون الحد الأخير من حاصل ضرب المضاريب المطابقة
للجذور السالبة والتخيلية موجبًا وبناء على ذلك اذا كان هذا الحاصل
محتويًا على مغايرات فلا تكون الا زوجية العدد وحيث أن كل واحد
من المضاريب المطابقة للجذور الموجبة يشتمل على عدد فردى من
المغايرات فان كان عدد المغايرات اكبر من عدد الجذور الموجبة
فانه يكون أكبر منه بعدد زوجى

[illegible] وحيث ان علامات جذور معادلة تتغير كلها عند وضع
[illegible] يتولد من النظرية السابقة ان عدد الجذور
[illegible] لا يزيد عن عدد مغايرات المعادلة المحولة التى
[illegible] من وضع [illegible] بدل س

[illegible] كانت المعادلة تامة فانه لا يترتب على وضع - س بدل س
[illegible] علامات الحدود الزوجية المرتبة (كما فى بند ٤٤٨)
[illegible] فى ذلك تؤول المغايرات الى مداومات وبالعكس وحينئذ
يمكن فى معادلة تامة ان يكون عدد الجذور السالبة أكبر من عدد
المداومات

وهذا لا يتأتى اذا كانت المعادلة غير تامة لانه اذا فرضت المعادلة
س^{٣} - ٢ س + ١ = ٠ مثلاً شوهد انها لا تشتمل على مداومة واحدة
مع انها تشتمل على جذر سالب بالأقل (كما في بند ١٣٠)

بند ٢٥٤ اذا جعل ت رمزاً لعدد مغايرات معادلة ن ت رمزاً
لعدد مغايرات المعادلة المحولة المتحصلة من وضع - س بدل س
فلا يمكن ان يكون عدد الجذور الحقيقية للمعادلة اكبر من ت + ت
وحينئذ اذا كان هذا المجموع اقل من الدرجة م كان باقي جذور المعادلة
تخيلية

مثلاً لتفرض المعادلة س^{٣} - ٢ س + ١ = ٠ التي يكون فيها ت = ٢
فاذا وضع فيها - س بدل س كان ت = ١ وحينئذ يكون
ت + ت = ٣ وبناء على ذلك يكون للمعادلة جذران تخيليان بالأقل

وحيث ان المجموع ت + ت لا يزيد دائماً عن الدرجة م
فان كان أقل منها فان الفرق بينهما يكون عدداً زوجياً لانه ان كانت
المعادلة تامة كان المجموع ت + ت مساوياً لعدد المغايرات والمداومات
المساوي للدرجة م وحينئذ يلزم لاختبار الحالة التي تكون فيها
المعادلة ناقصة بعض حدود فيقال اذا اعتبرت متسلسلة مركبة

من حدود

من حدود متوالية عددها $ع+١$ كالمتسلسلة $\pm ج س^{ع} \pm ع س^{ع-١}$
$\cdots \pm ع س^{ع-ع+١} \pm ط س^{ع-ع}$

فانه يتحصل من هذه الحدود المتسلسلة في المعادلة المفروضة وفي المعادلة المحولة مغايرات عددها $ع$ فان قطع النظر عن سائر حدود هذه المتسلسلة ما عدا احدها الأول وهو $\pm ج س^{ع}$ والاخير وهو $\pm ط س^{ع-ع}$ يتولد من ذلك حالتان متباينتان احداهما الحالة التي يكون فيها $ع$ زوجيًا والثانية التي يكون فيها $ع$ فرديًا

فاذا وضع في الحالة الاولى $-س$ بدل $س$ في المعادلة فإما ان تغير علامة الحدين $\pm ج س^{ع}$ و $\pm ط س^{ع-ع}$ وإما ان لا تتغير وبناء على ذلك ان تخالف هذان الحدان في العلامة تحصل منهما في المعادلة المفروضة والمحولة مغايرتان وان اتحدا في العلامة فلا يتحصل منهما مغايرة ما واذا وضع في الحالة الثانية $-س$ بدل $س$ في المعادلة فان علامة أحد الحدين المذكورين لا تتغير وأما علامة الآخر فانها تتغير وبناء على ذلك ان تحصل منهما في المعادلة المفروضة مغايرة فلا يتحصل منهما في المحولة مغايرة مثلها وبالعكس

ومن هنا يؤخذ أولاً اذا كان ع = ٢ كما في الحالة التي لم يحذف فيها من المعادلة غير حد واحد أن المجموع ت + تَ يكون مساويًا للدرجة م

ن كان الحدان اللذان يوجد بينهما الحد المحذوف متخالفين في العلامة ويكون المجموع المذكور مساويًا للدرجة م - ٢ ان كانا متحدين في العلامة وثانيًا انه اذا كان ع عددًا زوجيًا اكبر من ٢ فبعد حذف سائر الحدود المحصورة بين ± ح س^ع و ± ط س^{ع-ع} يكون المجموع ت + تَ مساويًا للدرجة م - (ع - ٢) أو م - ع بحسب ما يكون الحدان ± ح س^ع و ± ط س^{ع-ع} متخالفين في العلامة أو متحدين فيها وثالثًا انه اذا كان ع عددًا فرديًا فان المجموع ت + تَ يكون بعد حذف الحدود المحصورة بين الحدين ± ح س^ع و ± ط س^{ع-ع} مساويًا للدرجة م - ع + ١ وحينئذٍ يكون المجموع ت + تَ في معادلة غير تامة مساويًا دائمًا في النهاية لدرجة هذه المعادلة فان كان اقل منها كان الفرق بينهما عددًا زوجيًا

ويشاهد زيادة على ذلك انه اذا نقصت قوة واحدة من قوى المتغير س بين حدين متخالفين في العلامة وكان المجموع ت + تَ مساويًا للدرجة م أمكن أن تكون سائر الجذور حقيقية واذا

نقصت

نقصت قوة واحدة للمتغير س بين حدين متحدين في العلامة كان بين
جذور المعادلة جذران تخيليان بالأقل فان نقصت المعادلة قوى
متوالية عددها ع-١ للمتغير س وكان ع عدداً زوجياً كان
عدد الجذور التخيلية للمعادلة مساوياً بالأقل ع-٢ متى كانت
الحدود التي توجد بينها هذه القوى المحذوفة للمتغير س متخالفة
في العلامة أو انه يكون مساوياً بالأقل للعدد ع متى كانت الحدود
المذكورة متحدة في العلامة فان كان ع عدداً فردياً كان للمعادلة
بالأقل جذور تخيلية عددها ع-١

٢٥٤ ومتى كانت جميع جذور معادلة حقيقية كان عدد الجذور
الموجبة مساوياً لعدد المغايرات الموجودة في المعادلة وعدد الجذور
السالبة مساوياً لعدد المغايرات الموجودة في المعادلة المحولة المتحصلة
من وضع - س بدل س

لانه اذا جعل ق رمزاً للعدد الأول من المغايرات و ق رمزاً
للعدد الثاني منها و ع رمزاً لعدد الجذور الموجبة و ح رمزاً
لعدد الجذور السالبة و م رمزاً لدرجة المعادلة فحيث أن
سائر الجذور حقيقية فيكون ع+ح = م وحيث أن المجموع ع+ح

لا يزيد عن المجموع ت + تَ الذى يساوى فى النهاية الدرجة م فيلزم أن يكون

ت + تَ = م أو ت + تَ = ع + ح

اذا تقرر هذا وكان ع أقل من تَ فانه يلزم ان يكون ح > تَ وهذا مستحيل وحينئذ يكون ع = تَ و ح = تَ

فاذا كانت المعادلة تامة فان عدد مغايرات المعادلة المحولة يكون مساويًا لعدد مداومات المعادلة المفروضة وفى هذه الحالة اذا كانت جميع الجذور حقيقية كان عدد الجذور السالبة مساويًا لعدد المداومات

الباب العاشر

فى البحث عن الجذور الحقيقية للمعادلات الرقمية ذات المجهول الواحد وفى نهايات الجذور

يعد الطرق التى بها تتعين الجذور الحقيقية لمعادلة هى من الطرق التخمينية وأول مسئلة توضع لحصر هذه الطرق التخمينية هو انه يلزم ايجاد عددين تكون الجذور محصورة بينهما وهذان العددان

هما

هذا المعروفان بنهايتي الجذور وقد تقدم (في بند ١٢٦) انه يوجد دائماً عدد يكون كل واحد من مقادير المجهول اكبر منه وانه يترتب على كل واحد منها ان الطرف الأول من المعادلة تكون له مقادير متحدة في العلامة مع الحد الأول ومن البديهي أن هذا العدد هو النهاية الكبرى لجذور المعادلة ولبيان الكيفية التي بها يمكن ايجاد هذه النهاية يبرهن في مبداء الأمر على ان الحد الأول من المعادلة الذي يفرض موجباً يكون اكبر من مجموع الحدود السالبة عند ما يفرض للمتغير س مقدار موجب أو مقداراً اكبر منه لانه اذا حولت سائر الحدود الموجبة من المعادلة الى طرف ما عدا الحد الأول تحصلت من ذلك كمية كثيرة الحدود كالكمية

$$س^{م} - جـ_{١} س^{م-ع} - ء_{١} س^{م-ح} - هـ_{١} س^{م-ك} - \ldots$$

فاذا وضعت المتباينة

$$س^{م} > جـ_{١} س^{م-ع} + ء_{١} س^{م-ح} + هـ_{١} س^{م-ك} + \ldots$$

فانه يشاهد انها تتحقق اذا تحصلت المتباينة

$$١ > \frac{جـ_{١}}{س^{ع}} + \frac{ء_{١}}{س^{ح}} + \frac{هـ_{١}}{س^{ك}} + \ldots$$

التي يكون طرفها الثاني صغيراً بقدر ما يكون مقدار المتغير س

كبيرًا ويكون طرفها الأول ثابتًا وحينئذٍ اذا تحققت هذه المتباينة بمقدار كالمقدار ل الذى يفرض فيها المتغير س فانها تتحقق أيضًا بأى مقدار يفرض للمتغير س بشرط أن يكون هذا المقدار أكبر من المقدار ل المذكور .

فاذا فرض للمتغير س مقادير لا تزال آخذة فى الزيادة بالابتداء من س = ل فان

الطرف الاول من المعادلة يأخذ مقادير لا تزال آخذة فى الزيادة أيضًا لان الكمية الكثيرة الحدود س - ج [illegible] - ج لا تختلف عن الكمية الكثيرة الحدود [illegible] - ج

وحينئذٍ اذا فرض للمتغير س مقادير لا تزال آخذة فى الزيادة بالابتداء من س = ل فان المضروب [illegible] يأخذ فى الزيادة هو والكمية المحصورة بين القوسين أيضًا وان كانت المعادلة محتوية على حدود موجبة فان كل واحد منها يزداد مع س وحينئذٍ لا يزال مقدار الطرف الاول آخذًا فى الزيادة

٢٥٦ ويعمل بواسطة بعض تجاريب تعيين مقدار للمتغير س بحيث يكون الطرف الأول من معادلة أكبر من مجموع الحدود السالبة

وحينئذٍ

وحيث أن [illegible] وضع [illegible] في [illegible] وجب علينا أن نتصدى لذكرها فنقول

لتفرض المعادلة

$$\text{ص} = \text{جـ}\,\text{س}^{\text{ن}} + \text{ء}\,\text{س}^{\text{ن}-١} + \text{س}^{\text{ن}-٢} \ldots + \text{ك} = ٠$$

التي يرى فيها أن العددين + و − موضوعتان امام كل من حدود هذه المعادلة ما عدا حدها الأول ليعلم من ذلك أن هذه الحدود قد تكون موجبة وقد تكون سالبة

فاذا جعل [illegible] مقدار مطلق ذكر مكرر سالب وفرضت المتتابعة

$$\text{س} = \text{أ}_{١}\,\text{س}^{١} + \text{أ}_{٢}\,\text{س}^{٢} + \ldots\ldots + \text{أ}_{\text{ن}}\,\text{س} + \text{د}$$

فمن [illegible] أن المقدار الذي [illegible] من التغير س ويكون [illegible] لهذه [illegible] الحد الأول [illegible] الحد الآخر [illegible] الأبنية التي تشتمل عليها المعادلة

وحيث أن الكمية الكثيرة الحدود

$$\text{أ}_{\text{ن}}\,\text{س}^{\text{ن}-١} + \text{أ}_{\text{ن}-١}\,\text{س}^{\text{ن}-٢} \ldots + \text{أ}_{١}\,\text{س} + \text{أ}_{٠}$$ لا تختلف عن الكمية الكثيرة

الحدود

$$\text{م}_1 (\text{س}^{\text{ن}-1} + \text{س}^{\text{ن}-2} \dots + \text{س} + 1) \text{ أو } \frac{\text{م}_1 (\text{س}^{\text{ن}} - 1)}{\text{س} - 1}$$

فيمكن وضع المتباينة السابقة هكذا

$$\text{س}^{\text{ن}} > \frac{\text{م}_1 (\text{س}^{\text{ن}} - 1)}{\text{س} - 1}$$

وحيث أن مقدار المتغير س لا يكون الا من الاعداد التي تزيد عن الواحد كما يفهم ذلك من منطوق المسئلة فيكفي لذلك أن يكتب

$$\text{س}^{\text{ن}} = \text{أو} > \frac{\text{م}_1 \text{ س}^{\text{ن}}}{\text{س} - 1}$$

ومن هنا ينتج

$$\text{س} - 1 = \text{أو} > \text{م}_1 \quad \text{ومنها يحدث} \quad \text{س} = \text{أو} > 1 + \text{م}_1$$

وبناء على ذلك يؤخذ من هنا انه يلزم لتعيين النهاية الكبرى للجذور الموجبة لكل معادلة ان يضاف الى الواحد المقدار المطلق لأكبر مكرر سالب

بند ٢٥٧ اذا كانت الحدود السالبة لا تبتدأ بعد الحد الأول مباشرة أمكن تحصيل نهاية أصغر من النهاية السابقة

ولبيان ذلك تفرض المعادلة

$$\text{س}^{\text{ن}} \dots - \text{ف} \text{ س}^{\text{ن}-\text{ك}} \pm \text{ع} \text{ س}^{\text{ن}-\text{ك}-1} \dots \pm \text{ك}_1 = 0$$

وحيث

وحيث أن الحد $-\text{ف}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ج}}$ هو [illegible] سالب وان الحدود التالية له قد تكون موجبة وقد تكون سالبة اذا جعل ق_1 رمزاً للمقدار المطلق لاكبر مكور سالب ووضعت المتباينة

$$\text{س}^{\text{م}} > \text{ق}_1\,\text{س}^{\text{م}-\text{ج}} + \text{ق}_1\,\text{س}^{\text{م}-\text{ج}-1} + \dots + \text{ق}_1\,\text{س} + \text{ق}_1$$

شوهد أن كل مقدار يفرض للمتغير س ويكون محققاً لهذه المتباينة يُصَيِّرُ الحد الأول $\text{س}^{\text{م}}$ أكبر من مجموع سائر الحدود السالبة التي توجد في المعادلة وحيث أن المتباينة المذكورة تؤول الى المتباينة

$$\text{س}^{\text{م}} > \text{ق}_1\,\frac{\text{س}^{\text{م}-\text{ج}+1}-1}{\text{س}-1}$$

فاذا كان لا يبحث عن مقدار المتغير س الا بين الاعداد التي تزيد عن الواحد فانه يكفي لذلك ان يكون

$$\text{س}^{\text{م}} > \frac{\text{ق}_1\,\text{س}^{\text{م}-\text{ج}+1}}{\text{س}-1} \quad \text{أو} \quad \text{س}^{\text{م}-\text{ج}-1}(\text{س}-1) > \text{ق}_1$$

وحينئذ لا يتحقق هذا الشرط الأخير الا اذا كان

$$(\text{س}-1)^{\text{ج}-1}(\text{س}-1) = \text{أو} > \text{ق}_1 \quad \text{أو كان} \quad (\text{س}-1)^{\text{ج}} = \text{أو} > \text{ق}_1$$

ومن هنا ينتج

$$\text{س} = \text{أو} > 1 + \sqrt[\text{ج}]{\text{ق}_1}$$

وحينئذ يؤخذ من ذلك ايضاً أنه يلزم لايجاد نهاية كبرى للجذور

الموجبة ان يضاف إلى الواحد جذر المقدار المطلق لاكبر المكررات السالبة الذى تكون درجته هى الفاضل بين درجة المعادلة وأس اول حد سالب

تنبيه

اذا كان المكرر م أصغر من الواحد فان النهاية ١ + م$_{١}$ تؤثر فى الدل على النهاية المتحصلة بواسطة القاعدة السابقة

بند ٥٨ ويمكن ايضاً تحصيل نهاية كبرى للجذور الموجبة بطريقة المعلم نيوتون وهى

انه اذا فرضت المعادلة د (س) = ٠ واريد تحصيل معادلة أخرى حقيقية الجذور لا تختلف جذورها عن جذور المعادلة المفروضة إلا بكون كل واحد منها ينقص عن نظيره بكمية واحدة كالكمية ع لزم أن يوضع ص = س - ع ومن هنا يؤخذ أن س = ص + ع فتكون المعادلة المحولة د (ص + ع) = ٠ أو

$$د(ع) + د'(ع)ص + د''(ع)\frac{ص^{٢}}{١\times٢} + د'''(ع)\frac{ص^{٣}}{١\times٢\times٣} + \text{الخ} = ٠$$

اذا تقرر هذا وتعين العدد ع على وجه بحيث تكون جميع حدود المعادلة السابقة موجبة فانه لا يكون لهذه المعادلة جذر موجب

(كما في بند ٤٤٩) فإذاً لا يكون للمعادلة المفروضة ء(س) = ٠ جذر أكبر من ج وإذاً يكون هذا العدد هو النهاية الكبرى للجذور الموجبة للمعادلة ء(س) = ٠.

ولتحصيل عدد كالعدد ج به نصير جميع الدلالات ء(س) ، ء'(س) ، ء''(س) ، ... ء^(ن)(س) الخ موجبة تعتبر في مبداء الأمر المشتقة ذات المرتبة م-١ التي لا تشتمل على المتغير س الا بدرجة اولى ثم يعين لهذا المتغير مقدار يُصيّرها موجبة ثم يوضع هذا المقدار في المشتقة ذات المرتبة م-٢ فان كان الناتج المحصل سالباً فانه يلزم أن يزاد مقدار المتغير س عن أصله واحداً فواحداً وهكذا بطريق التوالي الى ان يتوصل الى عدد يحصل منه ناتج موجب ثم يتوالى العمل بهذه المثابة في الدلالات المتوالية الى الدلالة ء(س)

فاذا كان عدد كالعدد ج يُصيّر المشتقات موجبة من ابتداء المشتقة ذات المرتبة م-١ الى المشتقة ذات المرتبة ٢ واضيف الى هذا العدد بالتوالي واحداً وعدة احاد حتى تُوصل الى المشتقة ذات المرتبة ٢-١ فلكي تكون موجبة يلزم أن يتحقق ان المقدار الجديد الذي يفرض للمتغير س يُصيّر آخر المشتقات

بة من ابتداء مشتقة ذات المرتبة م - ١ الى المشتقة ذات المرتبة

ن فانه يجد

$$\text{د}^{\text{ن}}(\text{ح}+\text{هـ}) = \text{د}^{\text{ن}}(\text{ح}) + \text{د}^{\text{ن}+1}(\text{ح})\,\text{هـ} + \text{د}^{\text{ن}+2}(\text{ح})\,\frac{\text{هـ}^2}{\text{٢}\times\text{١}} + \cdots + \text{ح}^{\text{ن}}$$

وحينئذ اذا كانت الدلالات $\text{د}^{\text{ن}}(\text{هـ})$ ، $\text{د}^{\text{ن}+1}(\text{هـ})$ ، $\text{د}^{\text{ن}+2}(\text{هـ})$ ، $\text{د}^{\text{ن}}(\text{ح}+\text{هـ})$ كلها موجبة كانت هـ كمية موجبة ايضاً وبناء على ذلك تكون (ح) ، $(\text{ح}+\text{هـ})$ كمية موجبة

بند ٢٢٩ ومتى كانت جذور المعادلة المفروضة كلها حقيقية أمكن بواسطة الطريقة السابقة تحصيل أقرب نهاية أى تحصيل العدد الصحيح الذى يزيد عن أكبر جذر لانه لما كانت جميع الجذور حقيقية كانت جميع جذور المعادلة المحتوية على المتغير ص حقيقية ايضاً ولكن لا يكون لهذه المعادلة جذر موجب يلزم أن تكون جميع حدودها موجبة وحينئذ اذا كان لا يعتبر فى التجاريب غير الاعداد الصحيحة فانه يلزم دائماً تعيين أصغر عدد صحيح بحيث تكون مقادير الطرف الأول من المعادلة هى ومشتقاتها موجبة

بند ٢٣٠ ولتحصيل نهاية صغرى للجذور الموجبة يوضع $\frac{1}{\text{ص}}$ بدل ص فاذا فرض أن ل هى النهاية الكبرى لجذور المعادلة بالنسبة للمتغير ص فمن البديهى أن $\frac{1}{\text{ل}}$ هى أصغر نهاية لجذور المعادلة بالنسبة الى ص

فاذا اجرى هذا التعويض [illegible]

للنهاية الصغرى نجد [illegible]

بعد ان يتم على النحو المتصل من [illegible] مكرر علاوة

مخالفة لعلامة الحد الأخير [illegible]

وتحصل نهايات الجذور السابقة بهذه الكيفية وهي ان يوضع في المعادلة

− س بدل س ويبحث بعد التحويل عن نهايات الجذور الموجبة

لهذه المعادلة

ب د وتعتمد غالباً في البحث عن هذه النهايات الحدود الموجبة الداخلة

في أي معادلة كما في الامثلة الآتية وهي

س⁷ − ٤ س⁶ + ١٣ س⁵ − س⁴ − ١٨ س³ + ٣ س² − ١٠٠ س + ١٠٠٠ = ٠

التي يمكن وضعها بالصورة

س⁷ (س − ٤) + ٤ س⁵ (س − ١٣/١٣ س − ١٨/١٣) + ٣ س² (س − ٥٠/٣ س) + (١٠٠٠) = ٠

فيتعين ان [illegible] لا يكون مقدار موجب اذا فرض [illegible] = ٤

أو س > ٤ لان الكمية ذات الحدين س − ٤ تكون موجبة وحيث

ان الكمية ذات الحدود الثلاثة س − ١/١٣ س − ١٨/١٣ موجبة

بالنسبة لسائر مقادير المتغير س التي تزيد عن ١ + ١٨/١٣ وكذلك

$(س - \frac{٥٠٠}{٣})^٢ + \frac{٥٠٠٠}{٩}$ موجبة بالنسبة لسائر المقادير الحقيقية المفروضة للمتغير س فيكون العدد ٤ نهاية كبرى للجذور الموجبة وتكون هذه النهاية بمقتضى القاعدة المتقدمة (في بند ٥٦) بينة بالعدد ١٠١

ولنفرض أيضاً المعادلة

$$٢س^٦ - ٧س^٥ + س^٤ + ٢س^٣ - ٦٠س - ٤٨ = ٠$$

التي يمكن وضعها بالصورة

$$٢س^٥ (س - \frac{٧}{٢}) + س^٤ + ٢س^٣ - ٦٠س - ٤٨ = ٠$$

فيشاهد أن الكمية ذات الحدين $س - \frac{٧}{٢}$ تكون موجبة بالنسبة لكل مقدار يفرض للمتغير س بشرط أن يكون هذا المقدار أكبر من $\frac{٧}{٢}$ ويشاهد أيضاً بمقتضى القاعدة المتقدمة في (بند ٥٧) أن الكمية الكثيرة الحدود $س^٤ + ٢س^٣ - ٦٠س - ٤٨$ تكون موجبة بالنسبة الى $س = ١ + \sqrt[٣]{٦٠}$ والى كل مقدار أكبر من هذا المقدار وحيث أن $١ + \sqrt[٣]{٦٠}$ محصور بين ٤ ، ٥ فيكون العدد ٥ هو النهاية الكبرى للجذور الموجبة للمعادلة

ويمكن في هذا المثال تحصيل نهاية أصغر من النهاية ٥ لانه لما كان لا يوجد في الكمية الكثيرة الحدود $س^٤ + ٢س^٣ - ٦٠س - ٤٨$ الا مغايرة

واحدة

ة فان اخذ س فى الزيادة بالابتداء من الصفر فان مقدار الكمية
ة الحدود لا يزال آخذًا فى الزيادة ولا تتغير علامته الا مرة
ة كما تقدم (فى بند ٣٣) وحينئذ يرى أن المقدار المذكور
ب بالنسبة الى س = ٤ وحيث انه يرى أن الكمية ذات الحدين
$-\frac{٧}{٢}$ موجبة ايضًا بالنسبة الى س = ٤ فيكون العدد
اية كبرى للجذور الموجبة

تعل س = ٣ فى الكمية الكثيرة الحدود $س^٤ + ٢س^٣ - ٦٠س - ٤٨$
من ذلك ناتج سالب وبناء على ذلك تكون هذه الكمية الكثيرة
د سالبة ايضًا بالنسبة الى كل مقدار يفرض للمتغير س بشرط
ن هذا المقدار أصغر من ٣ وحيث أن $س - \frac{٧}{٢}$ سالب
النسبة الى س = ٣ والى كل مقدار يفرض لهذا المتغير
ان يكون أصغر من ٣ فيكون العدد ٣ نهاية صغرى للجذور
ة للمعادلة

بحثت ايضًا المعادلة

$س^٦ - ٢س^٥ - ٥س^٤ + ١٠٠س^٣ - ٨س^٢ + ٥٠س + ٦٠ = ٠$

ل النهاية الصغرى للجذور الموجبة لهذه المعادلة توضح

بالصورة

٦٠ + ٥٠ س − ٨ ش − ٢ ش^{٣} + ش^{٤} (١٢٠ − ٥ س − ٢ ش^{٢}) + ش^{٧} + ش^{٨} = ٠

ومن المحقق بمقتضى البراهين المتقدمة (في بند ٢٣٣ و ٢٥٥)

انه اذا كانت الكمية الكثيرة الحدود المرتبة بحسب الدرجات التصاعدية للحرف س مركبة من حد واحد أو من عدة حدود موجبة متبوعة بحدود كلها سالبة فانها ان كانت موجبة بالنسبة لأى مقدار رقمى يفرض للمتغير س كانت موجبة كذلك بالنسبة لأى مقدار رقمى اصغر منه

وحيث أن الكميتين الكثيرتى الحدود ٦٠ + ٥٠ س − ٨ ش − ٢ ش^{٣} و ١٢٠ − ٥ س − ٢ ش موجبتان بالنسبة الى س = ٤ فيكون العدد ٤ نهاية صغرى للجذور الموجبة للمعادلة

فاذا وضعت المعادلة بالمثابة

ش (ش^{٣} + ش − ٢ س − ٥) + ش (١٢٠ ش^{٢} − ٢ س − ٨) + ٥٠ س + ٦٠ =

شوهد أن العدد ٢ نهاية كبرى للجذور الموجبة وبناء على ذلك لا يكون للمعادلة جذر موجب وحيث أنه يوجد بها أربع مغايرات فيكون لها بالأقل أربعة جذور تخيلية

[illegible]

[illegible]

ويمكن أن يكون [illegible] مختلفا عن واحد

[illegible] يمكن أن تكون [illegible] المنطقة اعدادا صحيحة أو كسورا وبعد

[illegible] عن الجذور الصحيحة نفرض لمزيد الايضاح المعادلة [illegible]

[illegible] الدرجة الرابعة

$$جـ س^٤ + ء س^٣ + هـ س^٢ + ج س + ف = ٠$$

فاذا جعل حـ كناية عن جذر صحيح لهذه المعادلة فانه يحدث

$$جـ حـ^٤ + ء حـ^٣ + هـ حـ^٢ + ج حـ + ف = ٠$$

ومن هنا يؤخذ

$$\frac{ف}{حـ} = - جـ حـ^٣ - ء حـ^٢ - هـ حـ - ج$$

وحيث أن الطرف الأول من هذه المتساوية عدد صحيح فيلزم أن جـ يقسم ف قسمة بلا باق

ويجعل $\frac{ف}{حـ} = ف'$ ينتج من المتساوية السابقة

$$\frac{ف' + ج}{حـ} = - جـ حـ^٢ - ء حـ - هـ$$

وحينئذٍ يعلم من هنا أن ح يقسم ايضًا ح + ف قسمة بلا باق

واذا جعل $\frac{ف + ح}{ح} = هـ$ حد ث

$\frac{هـ + هـ}{ح} = -ح ح - أ$

ومن هنا يؤخذ ان ح يقسم ايضًا هـ + هـ قسمة بلا باق فاذا

جعل $\frac{هـ + هـ}{ح} = هـ$ حد ث

$\frac{هـ + أ}{ح} = -ح$

فاذا تحقق هذا الشرط الأخير كان ح هو جذر المعادلة

المفروضة اذ بمقتضى هذا الشرط تكون $\frac{هـ + أ}{ح} + ح = ٠$

وحينئذٍ تكون الكمية $\frac{هـ + أ}{ح} + ح$

للمقدومة هي الناتج المتحصل من وضع ح بدل س

في الطرف الأول من المعادلة بعد قسمتها على س وعلى ذلك

يلزم لكي تكون كمية صحيحة كالكمية ح جذرًا للمعادلة

اولا ان هذه الكمية تكون قاسمة للحد الأخير

وثانيًا انه اذا اضيف الى خارج قسمة الحد الأخير على ح مكرر

الحد المحتوى على س كان خارج قسمة المجموع على ح عددًا صحيحًا

وثالثًا انه اذا اضيف الى هذا الخارج الأخير مكرر الحد المحتوى على

ش كان خارج قسمة المجموع على ح عددًا صحيحًا وهلم جرا
وبالجملة اذا توالى العمل الى أن تحصل خارج القسمة الذى مرتبته (م-١)
(فى معادلة درجتها م) واضيف الى هذا الخارج مكرر الحد المحتوى
على ش^{م-١} وقسم المجموع على ح نحصل من ذلك خارج قسمة يكون
مساويًا لمكرر الحد الاول مأخوذًا بعلامة مخالفة لعلامته
فان كانت المعادلة غير تامة أُجريت عليها عملية المعادلة التامة
وذلك بأن يجعل الصفر مكررا لكل من قوى المتغير س الناقصة
من هذه المعادلة

بند ٢٦٤ ولتحصيل الجذور الصحيحة لمعادلة بواسطة الشروط المذكورة
تجرى عملية الحساب كما فى المثال

ش^٥ + ٥ ش^٤ + ش^٣ - ١٦ ش^٢ - ٢٠ ش - ١٦ = ٠

المبين فى هذا الجدول

+ ١٦ + ٨ ، + ٤ ، + ٢ ، + ١ ، − ١ ، − ٢ ، − ٤ ، − ٨ ، − ١٦ .

− ١ ، − ٢ ، − ٤ ، − ٨ ، − ١٦ ، + ١٦ ، + ٨ ، + ٤ ، + ٢ ، + ١

− ٢١ ، − ٢٦ ، − ٢٤ ، − ١٨ ، − ٣٠ ، − ٣٠ ، − ١٨ ، − ٢٤ ، − ٢٦ ، − ٢١

− ٦ ، − ١٤ ، − ٢٦ ، − ٣٦ ، − ٣٦ ، − ٢٦ ، − ١٤ ، − ٦

− ٤ ، − ٣ ، − ٢ ، − ١ ، ٠ ، + ١ ، + ٢ ، + ٣ ، + ٤

− ١٥ ، − ٢٤ ، − ٢٤ ، − ١٥ ، + ٥ ، + ١٤ ، + ٢٤ ، + ٣

− ١٤ ، − ٥١ ، − ٦٣ ، − ٥١ ، − ١٤ ، + ٦ ، + ٢٤ ، + ٤

− ٧ ، − ٥١ ، − ١٢٠ ، − ١٢٠ ، − ٥١ ، − ٧ ، + ١

− ٤ ، − ٢٦ ، − ٤٦ ، − ٤٦ ، − ٢٦ ، − ٤ ، + ٨ ، + ٢٤ ، + ٤

− ١ ، − ٢٦ ، − ٤٦ ، − ٤٦ ، − ٢٦ ، − ١ ، + ٨ ، + ٢٤ ، + ١

اعنى أنه يلزم أن نكتب فى صف واحد سائر قواسم الحد الأخير إما بعلامة + أو بعلامة − ونوضع مرتبة بحسب قيمتها ثم نكتب تحتها فى صف آخر خوارج القسمة المتحصلة من قسمة الحد الأخير −١٦ على كل من هذه القواسم

ويتكون الصف الثالث بهذه المثابة وهى أن يضاف لكل من الخوارج الموجودة فى الصف السابق عليه مكرر الحد المحفوظ الذى

الذى

الذى هو -٢٠

وتحصل حدود الصف الرابع بواسطة قسمة كل حد من الصف السابق عليه على حد الصف الأول المتقدم اذا كانت القسمة صحيحة بلا باق

وتكون باقى الصفوف بهذه المثابة

وحينئذ تكون الجذور الصحيحة هى $+٢ ، -٢ ، -٤$

فاذا قسم الطرف الأول من المعادلة على حاصل ضرب المضاريب $س - ٢$ ، $س + ٢$ ، $س + ٤$ تحصل خارج القسمة $س^٢ + س + ١$

وحينئذ يحدث الجذران الآخران من حل المعادلة $س^٢ + س + ١ =$

ويحذف عادة من الجدول السابق القاسمان $+١$ ، -١ لانه يسهل استخراجهما من المعادلة مباشرة ويمكن ايضاً فى مبداء الأمر تعيين نهايتى الجذور بحيث لا تجرب الا القواسم المحصورة بين هاتين النهايتين ويؤخذ من المثال السابق ان نهاية الجذور الموجبة المحسوبة بواسطة القاعدة المتقدمة (فى بند ٥٧) هى $١ + \sqrt[٣]{٢٠}$ وهى عدد اقل من ٤ فاذا وضع فى المعادلة $-س$ بدل $س$ شوهد أن -٥ هو نهاية الجذور السالبة وحينئذ

لا تجرب غير الأعداد + ٢ ، + ١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

بند ٢٦٥ فاذا فرضت ايضًا المعادلة

$$٢ س^٣ - ٣ ٥ س + ١٠٥ = ٠$$

فلا يكون العددان + ١ و - ١ جذرين لها وتكون النهايتان

هما + $\sqrt{\frac{٥٣}{٢}}$ ٥ - (١ + $\sqrt{\frac{١٠٥}{٢}}$) وتكون قواسم العدد ١٠٥

المحصورة بين هاتين النهايتين هى ٣ ، ٥ ، - ٣ ، - ٥ ، - ٧

وهذه القواسم تستلزم اجراء العمليات الآتية وهى

+ ٥ ، + ٣ ، - ٣ ، - ٥ ، - ٧

+ ٢١ ، + ٣٥ ، - ٣٥ ، - ٢١ ، - ١٥

- ٣٢ ، - ١٨ ، - ٨٨ ، - ٧٤ ، - ٦٨

. . . - ٦ .

. . . - ٢

فيشاهد بعد تحصيل الصف الثالث انه لا يراد من توالى هذه

العمليات التجريبية الا تحصيل القاسم + ٣ وينبغى أن يضاف

الى خارج القسمة - ٦ مكرر الحد المحتوى على المتغير س وحيث أن

هذا الحد ناقص فيكون مكرره مساويًا للصفر وحينئذ يلزم ان يتم

−٦ س + ٣ وحيث ان خارج قسمة ساوٍ ومكرر للحد الأول من المعادلة مأخوذاً بعلامة مخالفة من حده فيكون −٣ هو أحد الجذور المطلوبة

وحيث كان خارج قسمة س^٣ − ٣ س^٢ + ١٠٥ على س − ٣ هو س^٢ + ٦ س − ٣٥ يحصل الجذران الآخران بواسطة حل معادلة س^٢ + ٦ س − ٣٥ = ٠ وهذان الجذران غير منطقين

بند ٦٦ وحيث انه يمكن ان جذور المعادلة المفروضة تكون متساوية عند قسمتها على حاصل ضرب المضاريب المطابقة للجذور الصحيحة المحصلة يلزم أن يجرى العملية على المعادلة الناتجة منها كما اجريت عليها بعد ان لا تستعمل غير الجذور المحصلة ثم يتوالى العمل بهذه الشاكلة الى ان تحصل معادلة لا تكون مشتملة على واحد من الجذور الصحيحة المحصلة للمعادلة المفروضة وحينئذ تعلم الجذور المكررة ودرجة تكرارها واحد منها

بند ٦٧ اذا فرض ان ك مكرر ثم ج^ك كان جذراً للمعادلة

ج س^ن + ج^١ س^(ن−١) + ج^٢ س^(ن−٢) ... + ج^(ن−١) س + ج^ن = ٠

وكانت المكررات ج و ج و ج الخ اعداداً صحيحة فإلى وضع في هذه

المعادلة $\frac{ح}{ى}$ بدل س تحصل

$$ج \frac{ح^{م}}{ى^{م}} + ج_{١} \frac{ح^{م-١}}{ى^{م-١}} + ج_{٢} \frac{ح^{م-٢}}{ى^{م-٢}} \cdots\cdots + ج_{م-١} \frac{ح}{ى} + ج_{م} = ٠$$

وبضرب هذه المعادلة الكثيرة الحدود فى $ى^{م}$ يحدث

$$ج ح^{م} + ج_{١} ح^{م-١} ى + ج_{٢} ح^{م-٢} ى^{٢} \cdots\cdots + ج_{م-١} ح ى^{م-١} + ج_{م} ى^{م} = ٠$$

ومن هذه المتساوية يؤخذ أن خارج قسمة $ج ح^{م}$ على $ى$ و $ج_{م} ى^{م}$ على $ح$ يكونان عددين صحيحين وحيث ان العددين $ح$ و $ى$ أوليان معًا فيكون العدد $ى$ قاسمًا للمكور $ج$ والعدد $ح$ قاسمًا للمكور $ج_{م}$

وهذه النظرية يستنبط منها ان الجذور المنطقة تصير كلها اعدادًا صحيحة اذا ضربت جميع الجذور فى العدد $ج$ الذى هو مكور الحد الأول اذ بهذه المثابة يؤول البحث عن الجذور الكسرية الى البحث عن الجذور الصحيحة لكنه يمكن ايضًا تحصيل الجذور الكسرية بواسطة اجراء العملية على المعادلة مباشرة

ويؤخذ أيضًا من هذه النظرية انه اذا كان مكور الحد الأول هو الواحد فلا تكون الجذور المنطقة الا اعدادًا صحيحة ويشاهد ايضًا انه اذا ضربت جميع الجذور فى $ج$ حدثت من ذلك المعادلة

قوية التي مكرر حدها الأول هو الواحد ومكررات حدودها الأخر
اعداد صحيحه

بند ٣٦٨ وحيث أن الكسر $\frac{ح}{د}$ من جذور المعادلة فيكون الطرف الأول
قابلاً للقسمة على $س - \frac{ح}{د}$ ويكون الخارج (كما في بند ٣٧) هو

$جـ_{ن-١} + جـ_{ن-٢} \frac{ح}{د}$	$جـ_{ن-٢} + جـ_{ن-٣} \frac{ح^٢}{د^٢}$	$جـ_{ن-٣} \ldots + جـ_{ن-م-١} \frac{ح^{م-١}}{د^{م-١}}$
$+ جـ_١$	$+ جـ_٢ \frac{ح}{د}$	$+ جـ_{ن-م-٢} \frac{ح^{م-٢}}{د^{م-٢}}$
	$+ جـ_٣$	$\ldots\ldots$
		$+ جـ_{ن-م-١} \frac{ح}{د}$

فاذا رمزنا الى هذا الخارج بالرمز ق والى الطرف الأول من المعادلة
بالرمز ب فانه يحدث

$ب = (س - \frac{ح}{د}) ق$ أو $ب = (د س - ح) \frac{ق}{د}$

و ب هي كمية كثيرة الحدود تامة فاذا كان $\frac{ق}{د}$ محتوياً على مقامات
كسرية فبسبب ان هذه المقامات اولية مع $د س - ح$ لا يمكن ان
يكون حاصل الضرب $(د س - ح) \frac{ق}{د}$ كمية كثيرة الحدود تامة
(كما في بند ٣٦) فاذاً يلزم أن يكون الكسر $\frac{ق}{د}$ كمية كثيرة الحدود
تامة واذاً تكون ق كمية كثيرة الحدود تامة أيضاً

بند ٢٦٩ فاذا فرض الآن انه قد تكونت سائر الكور الموجبة والسالبة التي تكون بسوطها قواسم الحد الأخير ومقاماتها قواسم مكرر الحد الأول وكان ج واحدا من هذه الكور فلكي يعلم هل هذا الكر من جذور المعادلة س = ٠ ام لا يضرب العدد ج الذي هو مكرر الحد الأول في ج ثم يضاف الى حاصل الضرب العدد ج الذي هو مكرر الحد ن-١ ويضرب المجموع في ج ويضاف الى الحاصل العدد ج الذي هو مكرر الحد ن-٢ وهلم جرا وحينئذ يلزم ان تكون جميع النواتج المتحصلة اعدادا صحيحة ويكون الناتج الأخير مساويا للصفر

فاذا تحصل جذر كالجذر ج علم مباشرة خارج قسمة الطرف الأول من المعادلة على س - ج وبقسمة هذا الخارج على ء يتحصل خارج قسمة الكمية الكثيرة الحدود س على ء س - ح وبجعل هذا الخارج الأخير مساويا للصفر تتحصل معادلة دون المعادلة المفروضة في الدرجة منها تتحصر الجذور الأخر

بند ٢٧٠ وحيث أن خارج قسمة س على ء س - ج كمية كثيرة الحدود تامة فينتج من ذلك بفرض س = ا و س = ٠ انه اذا كان

ج

$\frac{ح}{ء}$ من جذور المعادلة كان الناتج الحادث من وضع +١ بدل س في الكمية س قابلاً للقسمة على ء − ح والناتج الحادث من وضع −١ بدل س في الكمية المذكورة قابلاً للقسمة على ء + ح ثم يبحث بين الكسور المتكونة بالمثابة المتقدمة عن الكسور المحققة للشرطين المذكورين ويقطع النظر عما عداها

ولتعيين الجذور الصحيحة يلزم ان يفرض ان ء = ١ وحينئذ اذا كان ح واحداً من هذه الجذور كان ح − ١ قاسماً للناتج الحادث من وضع +١ بدل س و ح + ١ قاسماً للناتج الحادث من وضع −١ بدل س

ولنمثل لذلك بالمعادلتين

٦س^٦ − ١٩س^٥ + ١٣س^٤ + ٢٠س^٣ + ٤٨س − ١٦ = ٠

و ١٥س^٤ + ١٦س^٣ − ٦٦س^٢ − ٥س + ٦ = ٠

فاما المعادلة الاولى فيكون ٢ واحداً من جذورها الحقيقة مكرراً مرتين ويكون جذراها الآخران $\frac{٢}{٣}$ و − $\frac{١}{٢}$ واما باقي الجذور فتكون تخيلية واما المعادلة الثانية فيكون جذراها الحقيقيان $\frac{١}{٣}$ و − $\frac{٢}{٥}$ ويكون جذراها الآخران غير منطقين

في طريقة الجذور المتساوية

بند ٢٧١ حيث أن الطرق التي يلزم استعمالها في تقدير الجذور غير المنطقة تقتضي كما سيأتي انه لا يكون للمعادلة جذور متساوية فمن الضروري اختبار الحالة التي بها يتحقق هذا الشرط والكيفية التي يمكن بها تحويل المعادلة المفروضة الى معادلات اخرى لا يدخل كل جذر في الواحدة منها الا مرة واحدة عند عدم تحقق هذا الشرط

بند ٢٧٢ مثلاً اذا فرضنا المعادلة

$$س^م + جـ س^{م-1} + د س^{م-2} + \dots + ر س + ك = ٠$$

ورمز للاختصار بالرمز د(س) الى الطرف الاول من هذه المعادلة وبالرمز دَ(س) لمشتقتها وهي

$$م س^{م-1} + (م-1) جـ س^{م-2} + (م-2) د س^{م-3} + \dots + ر$$

فتكون المشتقة دَ(س) مكوناً الاول قوة للمتغير ص في الناتج المتحصل من وضع س + ص بدل س في الكمية الكثيرة الحدود د(س) لانه اذا رمز الى الجذور المعادلة بالرموز ح ، ى ، ه ، ن ، ... حـ

$$د(س) = (س - ح)(س - ى)(س - ه) \dots (س - ك)$$

يدخل

وبوضع س + ص بدل س يحصل

د(س+ص) = (ص+س−ح)(ص+س−ى)(ص+س−هـ)....

(ص+س−ك)

ويمكن اعتبار الطرف الثانى من هذه المتساوية كحاصل ضرب مركب من مضاريب كيات ذات حدين عددها م وحدها الاول ص وحدودها الثانية س−ح، س−ى، س−هـ الخ وبناء على ذلك يكون مكرراً أول قوة للتغير ص فى هذا الحاصل مساوياً لمجموع حواصل ضرب الكيات س−ح، س−ى، س−هـ الخ بحيث يكون عدد مضاريب كل حاصل مساوياً م−١ وحينئذ يكفى لتكوين هذه الحواصل أن نقسم بالتوالى الدلالة د(س) على كل من المضاريب س−ح، س−ى، س−هـ الخ فيحدث

$$د'(س) = \frac{د(س)}{س-ح} + \frac{د(س)}{س-ى} + \frac{د(س)}{س-هـ} + \dots + \frac{د(س)}{س-ك}$$

فاذا فرض الآن أن

د(س) = (س−ح)^ح (س−ى)^ى (س−هـ)^هـ الخ

فانه يلزم فى مجموع خوارج قسمة الدلالة د(س) على كل من مضاريبها ان خارج قسمة د(س) على س−ح يتكرر مراراً

عددها م وخارج قسمة د(س) على س − د يتكرر مرارًا عددها

ع وخارج قسمة د(س) على س − هـ يتكرر مرارًا عددها ك وح

وحينئذٍ يتحصل

$$د(س) = م(س-ح)^{م-1}(س-د)^{ع}(س-هـ)^{ك} + ح$$

$$+ ع(س-ح)^{م}(س-د)^{ع-1}(س-هـ)^{ك} + ح$$

$$+ ك(س-ح)^{م}(س-د)^{ع}(س-هـ)^{ك-1} + ح$$

وبالمقارنة بين مقداري كل من د(س) و د'(س) يعلم ان كل واحدة

منهما بين الجمعين تقبل القسمة على حاصل الضرب

$$(س-ح)^{م-1}(س-د)^{ع-1}(س-هـ)^{ك-1} \quad ح$$

وزيادة على ذلك يرى ان هذا الحاصل هو القاسم المشترك الأعظم

بين الجمعين الكبيرين الحدود د(س) و د'(س) لانه ان لم يكن

كذلك لزم ان يكون أحد مضاريب د(س) قاسمًا ايضًا لخارج

قسمة د(س) على الحاصل المذكور وحيث أن هذا الخارج هو

$$م(س-د)(س-هـ)ح + ع(س-ح)(س-هـ)ح + ك(س-ح)(س-د)ح + ح$$

وان كل واحد من المضاريب س − ح و س − د و ح يقسم جميع

[illegible]

[illegible] مشترك لاعظم بين

[illegible] متساوية معادلة كالمعادلة

[illegible] = [illegible] مشترك لاعظم بين الكمية الكبيرة

المحدود [illegible] ومشتقه [illegible] ان هذا القاسم المشترك

عددًا كانت جذور المعادلة غير متساوية وان كان محتويًا على متغير

س بدرجة اولى فانه يكون دالًا على وجود جذرين متساويين

من جذور المعادلة ويكون باقي جذورها غير متساوية وان كانت

القاسم المشترك الأعظم المذكور بدرجة ثانية فاذا [illegible]
للصفر فيحصل من ذلك معادلة يمكن أن يكون جذراها غير متساويين
أو متساويين فان كانا غير متساويين دخل كل واحد منهما في المعادلة
د(س) = ٠ مرتين وان كانا متساويين كان للمعادلة ثلاثة جذور
متساوية كل واحد منها مساو للمقدار المتحصل للمتغير س

بند ٧٤ ولنوضح الطريقة التي يلزم سلوكها في العمل عند ما يكون
القاسم المشترك الأعظم بين د(س) ، ق د'(س) كمية كثيرة الحدود
درجتها أعلى من الدرجة الثانية فنقول

اذا جعل ب س رمزاً لحاصل ضرب المضاريب البسيطة الداخلة
في الكمية الكثيرة الحدود د(س) ، ب س رمزاً لحاصل ضرب
القوى الأولى للمضاريب المتساوية مثنى مثنى ، ب س رمزاً لحاصل
ضرب القوى الأولى للمضاريب المتساوية ثلاث ثلاث ، ب س رمزاً
لحاصل ضرب القوى الأولى للمضاريب المتساوية رباعاً وفرض
انه لا يوجد مضاريب من الداخلة في المعادلة تزيد في الدرجة
عن ذلك فيحدث

د(س) = ب س ب س^٢ ب س^٣

فاذا جعل

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$\frac{\text{ن}}{\text{ن}} = \text{س}$ و $\frac{\text{ن}}{\text{ن}} = \text{س}$ و $\frac{\text{ن}}{\text{ن}} = \text{س}$

وبإجراء هذه العمليات التي تتعين بها المناسيب س_1 و س_2 و س_3 تخصل سائر جذور المعادلة $\text{د}(\text{س}) = 0$ بواسطة حل كل واحدة من المعادلات

$\text{س} = 0$ و $\text{س}_1 = 0$ و $\text{س}_2 = 0$ و $\text{س}_3 = 0$

التي تؤخذ من أولاها الجذور البسيطة للمعادلة المفروضة ومن الثانية الجذور التي تدخل فيها مرتين ومن الثالثة الجذور التي تدخل فيها ثلاث مرات ومن الرابعة الجذور التي تدخل فيها أربع مرات

فإذا كانت واحدة من الكميات الكثيرة الحدود س_1 و س_2 و س_3 رقيقة استنبط منها أنه لا يكون للمعادلة جذور يكون عدد دخولها فيها مساويًا لمرتبة هذه الكمية الكثيرة الحدود

سند ولإجراء هذه الطريقة نفرض المعادلة

$\text{س}^8 - 7\text{س}^7 - 2\text{س}^6 + 118\text{س}^5 - 259\text{س}^4 - 2\text{س}^3 + 61\text{س}^2 - 108\text{س}$
$- 432 = 0$

فيشاهد أن القاسم المشترك الأعظم بين طرفها الأول ومشتقته هو

[illegible]

[illegible]

س = ٣

بحيث أن هذه الكمية الأخيرة لا تحتوي على المتغير س الابد[illegible]

[illegible] وجد [illegible] شرا وحينئذ يؤخذ

من ذلك أن المعادلة المفروضة لا تحتوي على مضاريب مرفوعة

لأقوى تزيد عن المرتبة الثالثة

ويجعل ص = ص ، ص = ص ، ص = ص دالة كما سبق على الحواصل المفروضة

يحدث

ص ص = ش − ٢ش − ٥ش + ١١٨ش + كح

ص ش = ش − ٧ش + ١٣ش + كح

ص = س − ٣

فاذا قسمت كل واحدة من هذه المتساويات على المتساوية التالية

لها فانه يحصل

ص ص ص = ش − ١٥ش + ١٠س + ٢٤ ح

ص ص = ش − ٤ش + س + ٦

واذا قسمت المتساوية الاولى على الثانية والثانية على ٢س = ص - ٢
حدث

س = س + ٤ و س = ش - س - ٢

وحينئذ تكون المعادلات التي يراد حلها هي

س + ٤ = ٠ و ش - س - ٢ = ٠ و س - ٣ = ٠

التي يتحصل من أولاها الجذر -٤ الذي لا يدخل في المعادلة الا مرة واحدة ومن الثانية الجذران -١ و +٢ اللذان كل
واحد منهما يدخل في المعادلة مرتين ومن الثالثة الجذر ٣
الذي يدخل في المعادلة ثلاث مرات

اذا فرضت ايضاً المعادلة

ش + ٢ ش + ش + ٦ ش + ٧ ش - ٢ ش + ٣ ش + ٢ ش - ١٠ ش - ٨ = ٠
اجريت عليها العملية السابقة فانه يحدث من ذلك المعادلة
المفروضة جذران غير متساويين وجذران كل واحد منهما
يدخل فيها مرتين وجذر يدخل فيها ثلاث مرات فأما الجذران
المتساويين فهما -٢ و +١ وأما الجذران اللذان يدخلان
مرتين فهما $\frac{-١ + \sqrt{-٧}}{٢}$ و $\frac{-١ - \sqrt{-٧}}{٢}$ واما الجذر

الداخل

[illegible]

[illegible] النتائج

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] الكميتين الحقيقيتين المحدود [illegible]

[illegible] = ب وإذًا تكون المعادلتان المطلوبتان

[illegible] = ٠ و ق = ٠.

[illegible] إذا كانت قسمة الطرف الأول من المعادلة المفروضة

[illegible]

مثلاً اذا فرضت المعادلة

س³ − ٨س² + ٢٤س − ٣٢س + ١٦ = ٠

كانت مشتقة طرفها الأول هي

٤(س³ − ٦س² + ١٢س − ٨)

فاذا قسمت هذه المعادلة س³ − ٨س² + ٢٤س − ٣٢س + ١٦

على س³ − ٦س² + ١٢س − ٨ فان القسمة تكون صحيحة

ويكون الخارج

[illegible]

[illegible]

[illegible]

بند ٢٧٩ ومتى علم جذر كالجذر ح لمعادلة امكن تعيين درجة تكرار هذا الجذر بواسطة وضعه في المشتقات المتوالية للطرف الأول من هذه المعادلة لانه يؤخذ من النظرية المتقدمة (في بند ٢٧٢) انه اذا كان الطرف الأول من المعادلة قابلاً للقسمة على $(س-ح)^{م-١}$ كانت مشتقته الأولى قابلة للقسمة على $(س-ح)^{م-٢}$ ومشتقته الثانية قابلة للقسمة على $(س-ح)^{م-٣}$ وهلم جرا ومشتقته ذات المرتبة م-١ قابلة للقسمة على س-ح ومشتقته التالية لها غير محتوية على المضروب س-ح وحينئذ فالجذر ح يجعل المشتقات المتوالية الى المشتقة م-١ للطرف الأول من المعادلة مساوية للصفر بشرط ان لا تؤول المشتقة التالية لهذه الاخيرة الى الصفر

بند ٢٨٠ ويمكن التوصل الى نظرية كالمتقدمة (في بند ٢٧٢) بواسطة طريقة مغايرة للطريقة التي سلكناها وهذه الطريقة هي التي تتعين بها الدلالات المشتقة بكيفية بسيطة

لانه اذا جعل ح رمزاً للواحد من جذور المعادلة د(س) = ٠ وتكونت من ذلك معادلة أخرى جذورها لا تنقص عن جذور المعادلة المفروضة الا بالجذر ح كان لهذه المعادلة

الاخرى جذور كل واحد منها مساوٍ للصفر بقدر ما يكون للمعادلة المفروضة جذور كل واحد منها مساوٍ للجذر ح ويلزم لأجل تنقيص جميع جذور المعادلة المفروضة بالجذر ح ان يجعل ص = س − ح فيكون س = ص + ح وحينئذ تكون المعادلة المحولة معينة بالصورة ق (ص + ح) = ٠ أو

ق(ح) + ق′(ح)ص + ق″(ح) ص²/(٢×١) + ق‴(ح) ص³/(٣×٢×١) + ... = ٠

وحيث أن الدلالة ق(ح) معدومة لكون ح هو المفروض من جذور المعادلة ق(س) = ٠ فلا تحقق المعادلة المحتوية على المتغير ص الا بجعل ص = ٠ واذا كان الجذر ح مكرراً مراراً عددها ح في المعادلة المفروضة وكانت المعادلة المحتوية على المتغير ص جذوراً عددها ح وكل واحد منها مساوٍ للصفر فانه يلزم ان يكون طرفها الأول قابلاً للقسمة على ص^ح وحينئذ ينبغي أن تكون مكررات سائر القوى المعدومة مختلفة عن الواحد ص^(ح−١) معدومة وبناء على ذلك اذا كان الجذر ح داخلاً في معادلة مراراً عددها ح فان سائر مشتقات طرفها الأول الى المشتقة التي مرتبتها ح − ١ تكون معدومة عندما يفرض في

هذه المعادلة أن س = ح واذا كان ح كناية عن جذر معادلة وانعدمت في فرض س = ح مشتقات الطرف الأول الى المشتقة التي مرتبتها ج-١ بدون أن تنعدم المشتقة التي مرتبتها ج دخل الجذر في المعادلة مرارًا عددها ج لانه يكون للمعادلة التي جذورها لا تنقص عن جذور المعادلة المفروضة الا بالجذر ح جذور عددها ج وكل واحد منها مساوٍ للصفر ومن هنا تؤخذ مباشرة النظرية المتقدمة (في بند ٢٧٢) لانه اذا كانت المشتقات الاول للدلالة ء(س) التي عددها ج-١ تؤول الى الصفر عند جعل س = ح وكانت الأخرى غير معدومة كان للمعادلة ء(س) = ٠ جذور عددها ج-١ وكل واحد منها مساوٍ للجذر ح وبناءً على ذلك تكون المشتقة ء(س) قابلة للقسمة على $(س-ح)^{ج-١}$ وهذه الكمية الكثيرة الحدود لا تقبل القسمة على قوة اعلى من القوة $(س-ح)^{ج}$ لانه يلزم لكي تكون المشتقة ء(س) قابلة للقسمة على $(س-ح)^{ج-١}$ ان المشتقة النونية للدلالة ء(س) تنعدم عند جعل س = ح

في استخراج

في استخراج [illegible]

[illegible] البحث عن هذه الجذور وهما نوعان مباحث [illegible]
[illegible] الأولى التي تتعلق بتعيين نهايتين لكل جذر واحد منها
أصغر من [illegible] والاخرى أكبر منه وهاتان
[illegible] قريبان من بعضهما على وجه بحيث لا يخرج بينهما
غير جذر واحد وهذا هو المعروف بحصر [illegible] والثانية
الثانية هي التي تتعلق بالبحث عن مقدار كل جذر [illegible] مع
درجة التقريب المطلوبة

[illegible] وقد سبق البرهان على أنه [illegible]
الأول من معادلة بدل المتغير [illegible]
في الملاحظة كان [illegible] له بالأقل [illegible]
هاتين الكميتين وهذه نظرية [illegible] على
كيفية استخراج الجذور

نظرية

اذا وضعنا بالتوالي في الطرف الأول من معادلة بدل المتغير
كميتين بينهما جذر حقيقي أو عدد فردي من الجذور نحصل من ذلك

ناتجان متخالفان فى العلامة فاذا كان لا يوجد بين هاتين الكميتين جذر حقيقى أو كان يوجد بينهما عدد زوجى من الجذور فان الناتجين المذكورين يكونان متحدين فى العلامة

ولتكن المعادلة المفروضة هى ء(س) = ٠ ويجعل ل و ے رمزين لكميتين حقيقيتين ويفرض أن ل < ے . فان كان لا يوجد للمعادلة جذر يكون محصورا بين الكميتين ل و ے المذكورتين كان الناتجان المتحصلان من وضع هاتين الكميتين بالتوالى بدل س متحدين فى العلامة لانهما لو تخالفا فى العلامة لوجد بين ل و ے جذر وهذا مخالف لما فرض (بند ٣٠٤)

ولنختبر الآن الحالة التى يوجد فيها بين ل و ے جذور ونفرض أن هذه الجذور مبينة بالرموز ح و ء و ه و .... و ك فتكون الكمية الكثيرة الحدود قابلة للقسمة على حاصل ضرب المضاريب س - ح و س - ء و ..... و س - ك وحينئذ اذا رمزنا الى الخارج بالرمز خ(س) نحصل

ء(س) = (س - ح)(س - ء)(س - ه) ... (س - ك) × خ(س)

فاذا فرض بالتوالى فى طرفى هذه المتساوية أن س = ل و س = ے

د(ل) = (ل - ح)(ل - ب) .... (ل - ك) × خ(ل) ه

د(ى) = (ى - ح)(ى - ب) .... (ى - ك) × خ(ى)

وحيث ان [illegible] محصورة بين الكميتين

ل ، ى فتكون [illegible] .... و ل - ك كلها

سالبة والمضاريب [illegible] .... و ى - ك كلها

موجبة ومن هذا يتحقق ان اصل ضرب المضاريب ل - ح و ل - د

و ك يكون محققاً لاصل ضرب المضاريب ى - ح

ى - د و ك اذا كان الفاصلين يكونان متخالفين في العلامة

[illegible] يكون عدد هذه الجذور زوجياً . فرديا

فان يكون الناتجان [illegible] و ن في (ى) متحدين في العلامة

لان [illegible] المعادلة [illegible] (س) = ٠ جذر

يكون [illegible] وان لا تكون الجذور

[illegible] المعادلة د(س) = ٠ هي وحدها

[illegible] المحصورة بين الكميتين ل و ى وهذا مخالف للفرض

[illegible] اذا كان عدد الجذور ح و د و هـ و ... و ك زوجياً

كان الناتجان د(ل) و د(ى) متحدين في العلامة وان كان

عددها فرديا كان هذان الناتجان متخالفين في العلامة

ويتنبط مباشرة من النظرية السابقة هذه النظرية وهي انه
اذا تحصل من كميتين موضوعتين في الطرف الاول من معادلة بدل
المتغير ناتجان متخالفان في العلامة فانه لا يوجد بينهما غير جذر
واحد او ان عدد الجذور المحصورة بينهما يكون فرديًا فاذا تحصل
من هاتين الكميتين ناتجان متحدان في العلامة فانه لا يوجد
بينهما جذر للمعادلة وان عدد الجذور المحصورة بينهما يكون
زوجيًا

تنبيه

الاثبات السابق لا يستلزم ان الجذور ح و ح و .... و ك
تكون مختلفة عن بعضها بحيث اذا وجد بين الكميتين ل و ت
جذر يكون مكررًا في المعادلة مرارًا زوجية العدد ولم يكن بينهما غير لزم
أن نعتبر أن عدد الجذور المحصورة بين هاتين الكميتين يكون زوجيًا
سيما اذا كان الحد الأخير من معادلة موجبا فلا يكون لهذه
المعادلة جذور موجبة أو ان عدد جذورها يكون زوجيًا
لانه اذا وضع بالتوالي بدل س صفر والنهاية الكبرى للجذور
الموجبة كان الناتجان المتحصلان متحدين في العلامة فاذا كان
الحد الأخير

[illegible]

[illegible]

[illegible] الجذور وجوب [illegible] خاصة
من الاستبدال [illegible] تغيير في [illegible] يوجد
من الاتحاد في درجة المعادلة فانه لا يوجد [illegible] بين كل عددين متواليين مكونين لناتجين مختلفين في العلامة
ولا يوجد [illegible] بين كل عددين متواليين مكونين لناتجين
متحدين في العلامة لانه وكان الامر بخلاف ذلك لزاد
عدد الجذور عن درجة المعادلة وحينئذ فقد امكن حصر
الجذور غير المنطقة المحورمة
ولنمثل لذلك بالمعادلة

$$س^٤ - س^٣ - ١٠ س^٢ + س + ١٥ = ٠$$

التي تكون نهايتا جذورها الموجبة والسالبة هي ٣ ، ٤ و -٣

بمقتضى الطريقة المتقدمة (في بند ٥٨) فاذا صنعت على التوالي

بدل المتغير في الطرف الاول من المعادلة جميع الاعداد الصحيحة

المحصورة بين -٣ و +٤ شوهد أن علامات النواتج لا تختلف

عن العلامات المبينة بالجدول الآتي وهو

س = -٣	س = -٢	س = -١	س = ٠	س = +١	س = +٢	س = +٣	س = +٤
+	-	-	+	+	-	-	+

ومن هنا يؤخذ أن جميع جذور المعادلة حقيقية وأن اثنين

منها موجبان واحدهما محصور بين ١ ، ٢ والآخر بين ٣ ، ٤

وأن الاثنين الآخرين سالبان واحدهما محصور بين -١ ، -٢

والآخر بين -٢ ، -٣

فان كانت درجة المعادلة م وعلم أن عدد جذورها الحقيقية

لا يزيد عن م - ٢ واجريت عملية حصر الجذور عند

ما توضع بدل المتغير الاعداد الصحيحة المحصورة

بين النهايتين حصل النواتج للمعادلة

من

من هذا الاستبدال [illegible]

واذا اريد حصر الجذور [illegible]

بدل المقدار الاعداد [illegible]

الموجبة ان عدد تغيرات [illegible]

الحادثة من الاستبدال [illegible]

مثلاً اذا فرض [illegible]

[illegible]

يقال ان هذه المعادلة [illegible]

لانه لا يوجد [illegible]

+ ١٠ والتي [illegible]

كان الناتج [illegible]

علية الاستبدال الناتج [illegible]

المعادلة جذران [illegible]

بين ٢ , ٣

واذا اريد حصر الجذور السالبة وحدها فانه يبدأ بوضع

− س بدل س في المعادلة المفروضة فتؤول الى

س - ٢ س + س - ٨ س - ١٠ = ٠

وحيث أن هذه المعادلة تحتوي على ثلاث مغايرات فيكون لها ثلاثة جذور موجبة وبمقتضى الطريقة المتقدمة (في ٢٥٨) يشاهد أن العدد ٣ هو النهاية الكبرى لهذه الجذور فاذا وضعت بدل المتغير الاعداد ٠ ، ١ ، ٢ شوهد انه يتحصل من هذه الاعداد نواتج سالبة وحيث انه يتحصل من العدد ٣ ناتج موجب فيؤخذ من ذلك انه يكون للمعادلة س - ٢ س - س - ٨ س - ١٠ = ٠ الأقل جذر سالب محصور بين ٠ ، ٢ لكن لا يعلم هل يكون الجذران الآخران حقيقيين أم تخيليين

٢٨٥ بعد اذا علم عدد الجذور الحقيقية فلا يشك في حصرها بهذه الكيفية وهي ان توضع بدل المتغير اعداد متقاربة [illegible] منها عن بعض بحيث يكون للنواتج المتحصلة تغير في العلامات بقدر ما يكون للمعادلة من الجذور الحقيقية فاذا لم يكن عدد الجذور الحقيقية معلوماً فانه يلزم تعيين كيفية تحصل تغاير بين المقادير المعوضة بحيث يوجد [illegible] بين كل مقدارين معوضين متواليين

[illegible] فروق

[illegible] معادلة

[illegible]

[illegible]

[illegible]

وهي انه لا يوضع بدل المتغير غير الاعداد الصحيحة المتتالية المحصورة بين النهايتين

وهذه الطريقة المنسوبة للمهندس وارنغ قد مكثت مجهولة الى ان استكشفها المهندس لاجرانج قبل ان يقف على اشغال وارنغ المذكور وهي على غاية من الضبط الا انها تجتنب في الاعمال احياناً متى كانت المعادلة التي يراد حلها مرتفعة الدرجة وذلك لطول الحسابات التي يلزم اجراؤها لاجل تحصيل المعادلة التفاضلية ويمكن الآن الاستغناء عن هذه المعادلة بنظرية شهيرة استكشفها المهندس اسطورم نتصدى لذكرها فنقول

نظرية المهندس اسطورم واستعمالها في البحث عن الجذور الحقيقية

بند ٢٨٦ ليفرض أن ق = ٠ معادلة بأي درجة جميع جذورها غير متساوية ويجعل ق رمزاً للدلالة المشتقة من ق ثم تجرى على ق و ق عملية كعملية القاسم المشترك الأعظم بحيث لا تختلف عنها الا بتغيير علامات البواقي عند تنزيلها

منزلة

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$\begin{array}{lcl}
ق_{١} & = & ق_{١} \, خ_{١} - ق_{٢} \\
ق_{٢} & = & ق_{٢} \, خ_{٢} - ق_{٣} \\
ق_{٣} & = & ق_{٣} \, خ_{٣} - ق_{٤} \\
\vdots & & \vdots \\
ق_{ن-١} & = & ق_{ن-١} \, خ_{ن-١} - ق_{ن} \qquad \cdots\cdots\cdots (١) \\
\vdots & & \vdots \\
ق_{ن-٢} & & ق_{ن-١} \qquad - ق_{ن}
\end{array}$$

(ويمكن فى عمليات القسم المتوالية اجتناب المكررات الكسرية بضرب كل واحد من المقاسيم فى المضروب الرقمى الموافق له لكنه ينبغى ان تكون المضاريب الداخلة فى العملية موجبة حتى لا تتغير علامات البواقى)

اذا تقرر هذا علم ان ملاحظة الدلالات ق ، ق ، ق ، ق قد وصلت المهندس اسطورم الى النظرية الآتية وهى

نظرية

سند ٨٧ اذا استعوض المتغير س فى الدلالات

ق ، ق

ق ، ق ، ق ، ..... ، ق ، ق

بعددين موجبين أو سالبين كالعددين ل ، ے فان كان ل
أصغر من ے كان عدد مغايرات علامات الدلالات المذكورة
بالنسبة الى س = ے مساويًا في النهاية لعدد مغايرات
علامات تلك الدلالات بالنسبة الى س = ل فان كان أصغر
منه كان الفرق بينهما مساويًا لعدد الجذور الحقيقية النسوبة
للمعادلة ق = ٠ والمحصورة بين ل ، ے

وللبرهنة على هذه النظرية يلزم اختبار الكيفية التي بها
يتغير عدد المغايرات المتكونة من علامات الدلالات

ق ، ق ، ق ، .... ق المعلومة الرتبة بالنسبة لاي مقدار
يفرض للمتغير س متى فرض لهذا المتغير جميع المقادير المتنوعة وحيث
انه لا يمكن حصول تغيير العلامات المفروضة عندما يأخذ س
في الازدياد الا بقدر تغيير علامة واحدة من الدلالات

ق ، ق ، ق ، ..... وبناء على ذلك تكون هذه الدلالة معدومة
فتستنبط من ذلك حالتان ينبغي اختبارهما وذلك بحسب ما تكون
الدلالة المعدومة هي الدلالة الاولى ق او واحدة من الدلالات

$ق_1$ و $ق_2$ ، ... لان الدلالة الاخيرة $ق_ن$ لا تكون معدومة بسبب أن $ق_ن$ يدل على عدد

الحالة الاولى

ولنختبر الآن التغير الواقع في العلامات متى وصل المتغير س الآخذ في الازدياد بالتدريج الى مقدار به تصير الدلالة ق مساوية للصفر أو زاد عن هذا المقدار فان وضع هذا المقدار المفروض للمتغير س بعد بيانه بالرمز ح في الدلالة المشتقة $ق_1$ فان هذه الدلالة تؤول الى عدد موجب أو سالب حيث ان المعادلة ق = ٠ ليس لها بالفرض جذور متساوية فاذا جعل و رمزا لكمية موجبة صغيرة بالكفاية بحيث لا يكون للمعادلة $ق_1$ = ٠ جذر محصور بين ح - و ، ح + و فلا تتغير علامة الدلالة $ق_1$ متى جعل س = ح - و ، س = ح و س = ح + و

اذا تقرر هذا ورمز للمقدار ق بالرمز ء(س) وللمقدار $ق_1$ بالرمز ءَ(س) تحصل على ملاحظة ان ء(ح) = ٠

$$ء(ح-و) = -\frac{و}{١}ءَ(ح) + \frac{و^٢}{١\times٢}ءَ''(ح) - \frac{و^٣}{١\times٢\times٣}ءَ'''(ح) + \text{الخ}$$

وحيث

وحيث انه لا يتعين للكمية صغيرة و مقدار فيمكن جعل
هذه الكمية صغيرة جداً بحيث يكون علامة تحليل المقدار
ر(ح-و) ارتباط بعلامة حدها الاول (كما في ص ٢٦٨) وحينئذ
يكون المقدار ر(ح-و) متحداً في العلامة مع -و ر'(ح)
وبناءً على ذلك متخالفاً في العلامة مع ر'(ح) وحيث ان المقدارين
ر'(ح) و ر'(ح-و) متحدان في العلامة فيكون المقداران
ر(ح-و) و ر'(ح-و) متخالفين في العلامة واذاً يكون المقداران
ق, ق١ متخالفين في العلامة بفرض س = ح-و
فاذا وضع + ء بدل -و في تحليل المقدار السابق حدث
ر(ح+و) = ق١ ر'(ح) + ق/(١×٢) ر''(ح) + ق٣/(١×٢×٣) ر'''(ح) + الخ
وحينئذ يشاهد ايضاً ان المقدار ر(ح+و) متحد في العلامة
مع المقدار ر'(ح) وكذا مع المقدار ر'(ح+و) وبناءً على ذلك
يكون المقداران ق, ق١ متحدين في العلامة بفرض

س = ح+و

ومن هنا يؤخذ بفرض س = ح انه اذا كان المقدار ر'(س)
او ق١ مسبوقاً بعلامة + كان المقدار ق مسبوقاً بعلامة

بفرض س = ح − و ومسبوقاً بعلامة + بفرض س = ح + و
فان كان المقدار ق مسبوقاً بعلامة − بفرض س = ح كان
المقدار ق مسبوقاً بعلامة + بفرض س = ح − و ومسبوقاً
بعلامة − بفرض س = ح + و كما يشاهد ذلك كله بالجدول
الآتي وهو

بفرض	س = ح − و	− ق₁		+ ق₁
	س = ح	+ ٠	أو	− ٠
	س = ح + و	+ +		− −

وبناء على ذلك اذا كان ح جذراً للمعادلة ق = ٠ تكون
من علامتي المقدارين ق₁ ، ق₂ مغايرة قبل أن يصل المتغير
س الى المقدار ح وهذه المغايرة تكون مداومة بعد
أن يتجاوز هذا المتغير عن المقدار ح المذكور
واما الدلالات الاخرى ق₁ ، ق₂ ، الخ فان كل واحدة منها
تكون كالدلالة ق₁ مسبوقة في فرض س = ح − و أو
س = ح + و بالعلامة التي يلزم ان تكون مسبوقة بها في
فرض س = ح اذا لم تنعدم واحدة ما من هذه الدلالات
في فرض

في فرض س = ء مع الدلالة ق

ولنتصدى لاختبار ما يترتب حصوله عند ما تكون واحدة من هذه الدلالات معدومة فنقول ـــــ

الحالة الثانية

اذا فرض أن $ق_2$ هي الدلالة التي انعدمت من بين الدلالات في فرض س = ء يقال أن هذا المقدار المفروض للمتغير س لا يمكن بواسطته جعل الدلالة $ق_{1-2}$ السابقة على الدلالة $ق_2$ مساوية للصفر وكذا لا يمكن بواسطته جعل الدلالة $ق_{1+2}$ التالية لهذه الدلالة مساوية للصفر لانه لو تأتى حصول ذلك لقسم المضروب س - ء في إن واحد كلاً من الباقيين المتواليين $ق_{1-2}$ ، $ق_2$ أو $ق_2$ ، $ق_{1+2}$ وحينئذ يكون س - ء مضروباً مكرراً في الكمية الكبيرة للحدود ق وهذا محال لانه قد فرض ان المعادلة ق = ٠ لا تكون لها جذور متساوية

وبناء على ذلك تؤول الدلالتان $ق_{1-2}$ ، $ق_{1+2}$ في فرض س = ء الى عددين متخالفين في العلامة كما يتحقق ذلك بالتأمل في المعادلة

$$ق_{1-2} = ق_2 لـه - ق_{1+2}$$

التي هي من المعادلات (١) المتقدمة (في بند ٢٨٦) لأنه ينتج من هذه المعادلة أن

$$ق_{2-1} = - ق_{2+1} \text{ عندما تكون } ق_2 = ٠$$

اذا تقرر هذا ووضع بدل س عددان كالعددين ء-و ، ء+و اللذين يختلفان عن ء اختلافاً يسيراً كان للدالتين $ق_{2-1}$ ، $ق_{2+1}$ بالنسبة لهذين المقدارين المفروضين للمتغير س عين العلامتين اللتين تكون لهما في فرض س = ء لانه يمكن جعل و صغيراً بالكفاية بحيث لا تتغير علامة كلتا الدالتين $ق_{2-1}$ ، $ق_{2+1}$ عندما يأخذ المتغير س في الزيادة من ء-و الى ء+و ومن هنا يؤخذ على أي وجه كانت علامة الدالة $ق_2$ في فرض س = ء-و لكونها موضوعة بين علامتي $ق_{2-1}$ ، $ق_{2+1}$ المختلفتين انه يتكون دائماً من علامات الدالات الثلاث المتوالية $ق_{2-1}$ ، $ق_2$ ، $ق_{2+1}$ في فرض س = ء-و مداومة ومغايرة أو مغايرة ومداومة وبمثل ذلك يبرهن مهما كانت علامة الدالة $ق_2$ في فرض س = ء+و على انه لا يتكون من علامات الدالات

الثلاث

الدلالات المتوالية $ق_{ن}$ ، $ق_{ن+١}$ ، $ق_{ن+٢}$ في فرض س = د ، د ، د

غير متغايرة واحدة

وبناء على ذلك يتكون من علامات جميع الدلالات ق ..... ق ن

في فرض س = د ، د متغايرات بقدر ما يتكون من علامات هذه

الدلالات متغايرات في فرض س = د ، د وحينئذ اذا كانت

واحدة من الدلالات غير الصفر فلا يزيد عدد المتغايرات

المحصلة من علامات ما لم يكن المقدار المفروض متغيرا من الذي

يترتب عليه جعل هذه الدلالة مساوية للصفر سببا في جعل

الدلالة الاولى ق مساوية للصفر ايضا لانه ينشأ في هذه

الحالة عن تغيير علامة هذه الدلالة حذف واحدة من المغايرات

عن يسار العلامات كما سبق اثبات ذلك (في الحالة الاولى)

ومثل هذا يتأتى حصوله اذا تعددت عدة دلالات متوالية

غير متجاورة في فرض س = د

وحينئذ فقد ثبت انه كلما وصل المتغير س الآخذ في الازدياد

بكمية غير محسوسة الى مقدار وزاد عن هذا المقدار الذي

يجعل الدلالة ق مساوية للصفر ترتب على علامات

الدلالات ق ، ق ، ق ، ..... ، ق انعدام المغايرة الحادثة
من علامتي الدلالتين ق ، ق وهذه المغايرة تستبدل بمداومة
وأما تغيير علامات الدلالات المتوسطة ق ، ق ، ق ، ... ، ق
فلا يترتب عليه زيادة عدد المغايرات ولا تنقيصه وبناء على
ذلك اذا أُخذ عدد كالعدد ل موجباً وسالب وعدد آخر
كبر منه كالعدد ے وفرض ان المتغير س لا يزال آخذاً
في الزيادة من ل الى ے فبقدر ما يوجد لهذا المتغير
من المقادير المحصورة بين ل ، ے التي تصير الدلالة
مساوية للصفر يكون من علامات الدلالات ق ، ق ، ق
... ، ق في فرض س = ے مغايرات عددها بالأقل
عدد المغايرات المتكونة من العلامات في فرض س = ل
حينئذٍ فهذه القاعدة هي عين النظرية التي يراد شرحها
وانما تختلف عنها في اللفظ فقط

تنبيه

يمكن ان تكون واحدة من الدلالات ق ، ق ، ق ، ... ، ق
معدومة إما في فرض س = ل أو في فرض س = ے وحينئذٍ
يجب

لا تعتبر في هذه الحالة غير مغايرات علامات جميع الدلالات وأما الدلالة التي انعدمت فيقطع النظر عنها لانه قد سبق انه اذا انعدمت الدلالة $ق_{ح}$ في فرض س = ل واستعوض المتغير س بكمية تختلف عن ل بيسير فانه يتكون دائماً من علامات الدلالات $ق_{ح-١}$ ، $ق_{ح}$ ، $ق_{ح+١}$ مغايرة ومداومة وهذه المغايرة لا تنعدم عند قطع النظر عن علامة الدلالة $ق_{ح}$

التمييز الاول

يمكن بواسطة النظرية السابقة معرفة عدد الجذور الحقيقية لمعادلة وذلك بأن يؤخذ بدل العددين اللذين يوضعان بدل س النهايتان الكبريان للجذور الموجبة والسالبة أو كيتان رقيتان اكبر منهما ويمكن ايضاً قطع النظر عن كل استبدال لانه يمكن دائماً ان يفرض للمتغير س مقدار كبير بالكفاية بحيث تكون كل واحدة من الدلالات $ق_{١}$ ، $ق_{٢}$ ، $ق_{٣}$ ..... ، $ق_{ن}$ محققة في العلامة مع حدها الاول (كما في نبذ ٢٧٦) وبناء على ذلك اذا لوحظت علامات الحدود الاول من الدلالات بفرض المتغير س سالباً وعلامات هذه الحدود بفرض هذا المتغير موجباً كانت

زيادة عدد مغايرات الجملة الاولى من العلامات عن عدد مغايرات الجملة الثانية منها هي عدد الجذور الحقيقية للمعادلة

النتيجة الثانية

لدلالات المساعدة ق ، ق ، ق ، ..... ، ق عددها ما و في العادة للدرجة اليمية للمعادلة ق = ٠ لانه يشاهد من البحث عن القاسم المشترك الأعظم بين ق ، ق ان كل باق تنقص درجته في العادة بواحد عن درجة الباقي السابق عليه وكلما كان عدد الدلالات ق ، ق ، ... مساويًا للدرجة اليمية للمعادلة يكن معرفة عدد الجذور التخيلية للمعادلة ق = ٠ وذلك بالنظر الى علامات الحدود الأول من هذه الدلالات حينئذ يكون للمعادلة ق = ٠ ازواج من الجذور التخيلية بعدد ما يوجد من المغايرات في جملة علامات الحدود الأول من الدلالات المساعدة ق ، ق ، ... الى الدلالة الثانية ق وهذه القاعدة تعلل اثباتها بواسطة النتيجة الأولى وذلك لأنه يشاهد بمقتضى هذا الفرض ان احدى الدلالتين المتواليتين ق ، ق ذو جيتا الدرجة والاخرى فردية الدرجة بحيث

تكونت من علامات هاتين الدلالتين مداومة عند فرض المتغير
، موجبًا تكونت من هذه العلامات مغايرة عند فرض هذا
لمتغير سالبًا وبالعكس

من هنا يؤخذ انه يلزم لكي تكون جميع جذور المعادلة ق = ٠
حقيقية ان تكون الحدود الاول من الدلالات $ق_1$ ، $ق_2$ ، ... ، $ق_ن$
متحدة في العلامة

سند ٢٨٨ ولنطبق الآن نظرية المهندس اسطورم على بعض امثلة فنقول

المثال الاول

اذا فرضت المعادلة $س^3 - ٢س - ٥ = ٠$ حدث

$$ق_1 = س^3 - ٢س - ٥$$

$$ق_2 = ٣س^2 - ٢$$

ويلزم لحساب الدلالة $ق_3$ ان تقسم الدلالة ق على $ق_1$
ولتجنب الكسور نضرب الدلالة ق في ٣ فيحصل من
ذلك الباقي $-٤س - ١٥$ وحينئذ يكون

$$ق_3 = ٤س + ١٥$$

ويلزم لحساب الدلالة $ق_4$ ان تقسم الدلالة $ق_1$ على الدلالة

ق ولتجنب الكسور تضرب الدلالة ق في ٤ كالباقي الذي
بدرجة اولى فيكون الباقي غير المشتمل على س مساويًا +٦٤٣٢
وحينئذٍ يكون

ق = −٦٤٣٢

ومتى فرض للمتغير س مقدار سالب تكونت من علامات الحدود
الاول للدلالات ق, ق, ق, ق جملة العلامات

− − + −

وهذه الحدود يتكون من علاماتها عند ما يفرض للمتغير س
مقدار موجب جملة العلامات

− + + +

وحيث انه يتكون من الجملة الاولى من العلامات مغايرتان
ومن الجملة الثانية مغايرة واحدة فلا يكون للمعادلة غير جذر
حقيقي واحد (كما في النتيجة الاولى من بند ٢٨٧) وحينئذٍ يكون
هذا الجذر موجبًا لان الحد الأخير سالب (كما في بند ٢٣١) ويكفي
لتحصيل نهايتين للجذر ان نوضع بدل المتغير في الدلالة ق
اعداد متنوعة وبناءً على ذلك اذا فرض ان س = ٠ كانت
هذه الدلالة سالبة وحيث انها تكون موجبة عند ما يفرض

ان

أنّ س = ١ + √٥ (كما في ١٠٠/٥٩) فيكون الجذر محصورًا بين الصفر . ، ٤ ويؤخذ من الفرض س = ٢ ناتج سالب ومن الفرض س = ٣ ناتج موجب وحينئذ يكون الجذر محصورًا بين ٢ ، ٣ وسيأتي انه يمكن بواسطة طرق بسيطة تحصيل مقدار يقرب من المقدار الحقيقي بقدر ما يراد

ولما كان لا يترتب على حساب الدلالات ق ، ق١ ، ق٢ صعوبة في العمل وجب الاعراض عن ايراد ذلك هنا مفصلًا

المثال الثاني

اذا وضعت المعادلة س٣ - ٧ س + ٧ = ٠ حدث

ق = س٣ - ٧ س + ٧ ، ق١ = ٣ س٢ - ٧ ، ق٢ = ٦ س - ٣ ، ق٣ = + ١

فان كان مقدار المتغير س سالبًا تكونت من علامات الحدود الاول من الدلالات ق ، ق١ ، ق٢ ، ق٣ جملة العلامات

+ − + −

وان كان مقدار المتغير س موجباً تكونت ايضاً من علامات هذه الحدود جملة العلامات

+ + + +

وحيث انه يتكون من جملة العلامات الاولى ثلاث مغايرات والثانية لا يتكون منها مغايرة ما فتكون جذور المعادلة الثلاثة حقيقية ولاجراء عملية استخراج الجذور يفرض بالتوالى ان س = −١٠ ، −١ ، ٠ ، +١ ، +١٠ فتكون علامات الدلالات ق ، ق١ ، ق٢ ، ق٣ بالنسبة الى هذه المقادير المفروضة للمتغير س هى المشاهدة فى الجدول

	ق	ق١	ق٢	ق٣
(−١٠)	−	+	−	+
(−١)	+	−	−	+
(٠)	+	−	−	+
(١)	+	−	−	+
(١٠)	+	+	+	+

ومن هنا يعلم أن المعادلة المفروضة لها جذر محصور بين −١ ، −٠

وجذران محصوران بين ١ و ١٠

واذا فرض أن س = ٢ تكونت من ذلك جملة العلامات

(٢) ..... + + + +

ويؤخذ من مقارنة هذه الجملة بالجملة المتكونة من فرض س = ١

ان الجذرين الموجبين يكونان محصورين بين ١ و ٢ فاذا فرض

أن س = ١٫٥ كان للدلالة ق مقدار سالب وبناء على ذلك

يكون أحد الجذرين الموجبين محصوراً بين ١ و ١٫٥ والآخر

بين ١٫٥ و ٢

وأما الجذر السالب للمعادلة المفروضة فيحصل له نهايتان متقاربتان

بقدر ما يراد وذلك بأن يوضع بدل المتغير في الدلالة ق وحدها

اعداد متنوعة فان كانت الاعداد التي توضع بدل المتغير صحيحة

كان الجذر محصوراً بين -٣ و -٤

واذا وضع المقدار س = ١٫٥ في الدلالات الثلاث ق و ق' و ق''

انعدمت الدلالة الأخيرة وتكونت من ذلك جملة العلامات

(١٫٥) ..... + ٠ - -

فاذا قطع النظر في هذه الجملة عن علامة الصفر تكونت منها مغايرة

واحدة وحينئذ ينقص عدد مغايرات هذه الجملة مغايرة واحدة عن عدد مغايرات الجملة المتكونة من فرض س = ١ ويزيد عدد هذه المغايرات واحدة عن عدد مغايرات الجملة المتكونة من فرض س = ٠ وهذا موافق للتنبيه المتقدم (في بند ٤٨٧)

المثال الثالث

اذا فرضت المعادلة $\text{ش}^{٤} - ٤\,\text{ش}^{٣} - ٣\,\text{س} + ٢٧ = ٠$ حدث

$$\text{ق} = \text{ش}^{٤} - ٤\,\text{ش}^{٣} - ٣\,\text{س} + ٢٧ \quad \text{ف}$$

$$\text{ق}_{١} = ٤\,\text{ش}^{٣} - ١٢\,\text{ش}^{٢} - ٣ \quad \text{ف}$$

$$\text{ق}_{٢} = ١٢\,\text{ش}^{٢} + ١٣٧١ \quad \text{ف}$$

$$\text{ق}_{٣} = ٤٩١\,\text{س} + ١٣٧١ \quad \text{ف} \cdot$$

$$\text{ق}_{٤} = -٧١٥٧٩٣٧$$

وهاك جدول العلامات التي تأخذها هذه المشتقات بالنسبة للمقادير المتنوعة المفروضة للمتغير س

أما الصف الأول من هذا الجدول فهو مكون من المعادلات التي تأخذ هذه الحدود الأولى من الدلالات ق، ق ق ق ق ق ق ق بالنسبة الى مقدار سالب مفروض للمتغير س

وأما الصف الثاني فانه يتكون من فرض س = ٠ وحيث أن عدد المتغايرات الموجودة في هذا الصف يساوي عدد المتغايرات الموجودة في الصف الأول فيكون للمعادلة المفروضة جذور سالبة وبناء على ذلك لا توضع بدل المتغير س في هذه المعادلة اعداد سالبة

أما الصف الثالث والرابع فانهما يتكونان من فرض س = ١ و س = ١٠
بحيث يعلم بالتأمل في هذين الصفين ان المعادلة المفروضة
يكون لها جذران حقيقيان محصوران بين ١ و ١٠
وحيث أن جملة العلامات المتكونة من فرض س = ١٠ عين
الجملة المتكونة من علامات الحدود الأولى من الدلالات بفرض
مقدار موجب للمتغير س فلا توضع في المعادلة بدل هذا المتغير
أعداد تزيد عن ١٠ وحينئذ يكون العدد ٥ هو النهاية
الكبرى للجذور الموجبة للمعادلة المفروضة
وبناء على ذلك يكون للمعادلة جذران حقيقيان وجذران
تخيليان فاذا كتبت ايضاً جملة العلامات المتكونة من فرض
س = ١ ثم كتبت جملتا العلامات المتكونتان من فرض
س = ٢ و س = ٣ شوهد أن أحد جذري المعادلة يكون
محصوراً بين ٢ و ٣ والآخر اكبر من ٣ وحينئذ يمكن
تحصيل نهايات قريبة من النهاية ٣ هذه وذلك
بالاقتصار على الدلالة ق

المثال الرابع

الشرح الرابع

[illegible] في ايجاد [illegible] الاذا [illegible] المعادلة

$س^3 + ج س + ك = ٠$ كلها حقيقية بحث [illegible]

$ق = س^3 + ج س + ك$ ٥

$ق_1 = ٣ س^2 + ج$ ٥

$ق_2 = ٦ ج س - ٣ ك$ ٥

$ق_3 = ٦ ج^3 - ٢٧ ك^2$

وحينئذٍ يلزم لكي تكون الجذور الثلاثة للمعادلة المفروضة حقيقية ان تكون الحدود الأول من الدلالات $ق$ ، $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$ بالنسبة لمقدار سالب مفروض للمتغير $س$ مسبوقة بعلامات لا تتكون منها الامغايرات ومسبوقة بالنسبة لمقدار موجب مفروض للمتغير $س$ بعلامات لا تتكون منها الامداومات فاذاً إذ كان مقدار المتغير $س$ سالباً كان الحد الأول من الدلالة $ق$ مسبوقاً بالعلامة $-$ والدلالة $ق_1$ مسبوقة بالعلامة $+$ وإذاً يلزم ان يكون الحد $٦ ج س$ مسبوقاً بالعلامة وتكون الدلالة $ق_2$ التي هي كمية ثابتة مسبوقة بالعلامة

ومن هنا ينتج أن

$$٤ < ٥ ع^{٣} + ٧ ك^{٢} < ٠$$

وهذان الشرطان كافيان في العمل لانهما ان تحققا لم يحتصل من علامات الحدود الأول للدلالات ق ، $ق_{١}$ ، $ق_{٢}$ بالنسبة لمقدار موجب مفروض للمتغير س غير مداومات

وبالجملة فانه يؤخذ من النتيجة الثالثة المتقدمة (في سند ٤٨٧) ان هذين الشرطين ضروريان وكافيان في العمل

ومما ينبغي التنبيه عليه أن الشرط الأول داخل في الثاني لان الحد ٧ ك^٢ لما كان دائماً موجباً كانت الكمية ٤ ع^٣ + ٧ ك^٢ دائماً موجبة مالم يكن ٤ ع^٣ كمية سالبة

سند ٤٨٩ اذا كانت واحدة من الدلالات المساعدة كالدلالة $ق_{٢}$ المتوسطة بين ق ، $ق_{١}$ مسبوقة دائماً بعلامة واحدة بالنسبة لسائر المقادير المفروضة للمتغير س التي تكون محصورة بين ل ، ے فلا حاجة الى اعتبار الدلالات التالية لهذه الدلالة لانه يكفي لذلك ان يوضع العددان ل ، ے بدل المتغير س في الدلالات ذات الدرجة العظمى وهي

ق ، ق١ ، ق٢ ، ... ق٢ وتكتب علامات المنوالج
فيكون عدد الجذور التي تغير الدلالة ق = ، المحصورة بين
ل ، ى مساويًا للفرق بين ما يدل به عدد مغايرات جملة
العلامات المتكونة من وضع العدد ل بدل المتغير س
عن عدد مغايرات جملة العلامات المتكونة من وضع العدد ى
بدل المتغير س

ويكفي لبيان هذه الخاصية أن ننبه على أنه يمكن أن نطبق على
الجملة الجزئية للدلالات ق ، ق١ ، ... ، ق٢ البرهنة
التي تقدمت في الجملة الكلية للدلالات ق ، ق١ ، ق٢ ، ... ، ق
ق١+٢ ، ... ، ق١ التي ترى أن الأخيرة منها دالة على عدد ثابت
والدلالة ق٢ لا تزال مسبوقة في هذا الفرض بعلامة
واحدة بدون أن يكون لها مقدار ثابت بالنسبة للمقادير
التصاعدية المفروضة للمتغير س من ل إلى ى
وحيث أن جملة علامات الدلالات ق ، ق١ ، ق٢ ، ... ، ق
تنعدم منها مغايرة كلما انعدمت الدلالة ق وأن انعدام
الدلالات المتوسطة بين ق ، ق٢ لا يترتب عليه زيادة

عدد المغايرات ولا نقصه فيكون للمعادلة ق = ٠ جذر محصورة بين ل و ے بقدر المغايرات التي تزيد بها جملة العلامات المتكونة من وضع العدد ے بدل المتغير س عن جملة العلامات المتكونة من وضع العدد ل بدل المتغير س وحيث ان النظرية السابقة قد صارت بسيطة كما هو شاهد هنا فلا صعوبة في استعمالها لانا اذا بحثنا عن القاسم المشترك الأعظم بين ق ، ق' توصلنا الى كمية كثيرة الحدود كالكمية ق' (ذات الدرجة الثانية مثلاً) التي لما كانت مساوية للصفر لم يحصل منها للمتغير س غير مقادير تخيلية وحينئذ لا حاجة الى توالي عمليات القسمة لان هذه الكمية الكثيرة الحدود ق' لا تزال متحدة في العلامة مع حدها الأول بالنسبة لسائر المقادير الحقيقية المفروضة للمتغير س وبناء على ذلك يمكن أخذ تلك الكمية بدل الدلالة الأخيرة من الدلالات المساعدة ق ، ق' ، الخ ويمكن ايضاً الاقتصار على كمية كثيرة الحدود كالكمية ق' التي تنعدم بالنسبة لمقادير حقيقية تفرض للمتغير س بشرط ان لا يتعذر تعيين جميع هذه المقادير لاننا اذا رمزنا

بالرموز

ج و ك و ر و الخ الى ما هو محصور من هذه المقادير بين ل و ے
وفرضنا ان هذه الرموز مرتبة بحسب عظمها وابتدائنا بأصغرها
تحصل بواسطة القاعدة المتقدمة لمعادلة ق = ٠ عدد من
الجذور المحصورة بين ل و ج - و (ن و هي كمية صغيرة بقدر
ما يراد) بقدر ما يتحصل لها من الجذور المحصورة بين
ج + و و ك - و أعني بين ج و ك (بجعل و كناية عن
عدد صغير بالكفاية) وبقدر ما يتحصل لها من الجذور
المحصورة بين ك و ر وهلم جرا ويفرض ثانيا أن المقادير
ج و ك و ر و الخ التي يترتب عليها انعدام الدلالة ق لا يترتب
عليها في آن واحد انعدام الدلالة ق

بند ٢٩٠ ويمكن ان يلاحظ انه اذا كانت الدلالة ق لا تزال
مسبوقة بعلامة واحدة بالنسبة للمقادير التصاعدية
المفروضة للمتغير س من ل الى ے كان عدد المغايرات
واحدا دائما عند ما يوضع بدل المتغير س العدد ل أو العدد
ے أو غيرهما من الأعداد المحصورة بين ل و ے في الحالة
الجزئية المتكونة من الدلالات ق ق ق ... ق لا يترتب

على انعدام الدلالات المتوسطة وقوع تغيير في عدد متغيراته
هذه الجملة غير انه يلزم اذا كان عدد المتغيرات زائد عن
ما يستعوض المتغير س في هذه الدلالات بالعددين ل ، ى
ان الدلالة ق تكون مسبوقة بعلامة واحدة بالنسبة للقادير
المتزايدة المفروضة للمتغير س بالابتدا من ل الى ى
لان هذه القضية لا تحقق الا في الحالة التي تكون فيها جميع
جذور المعادلة ق = ٠ حقيقية
سند ٤٧١ وقد فرضنا الى هنا ان المعادلة المفروضة ق = ٠
ليس لها جذور متساوية غير ان النظرية المتقدمة (في سند ٤٨٧)
لا تزال مستعملة وان لم يتحقق هذا الشرط
ولبيان ذلك يفرض انه يكون للمعادلة جذور متساوية
وان يجرى على الكميتين ق ، ق١ عملية مشابهة للعملية المتقدمة
(في سند ٤٨٦) فيتوصل الى باق كالباقي ق١ يكون دلالة للمتغير س
ويتم الباقي السابق عليه ق١ قسمة بلا باق فاذا يكون
الباقي ق١ هو القاسم المشترك الأعظم بين ق ، ق١
واذا يكون قاسما قسمة بلا باق لكل من البواقي المتوالية
ق

ق و ق ن ..... و ق ن

فاذا قسمت الدلالات ق و ق و ق و ..... و ق ن كل

ق ورمزنا الى الخوارج بالرموز ط ، ط و ..... ، ط فانه

يعلم بالسهولة ان النظرية المتقدمة (في ص ٢٨٧) تستوفي

المعادلة ط = ٠ وذلك باعتبار الدلالات

ط و ط و ط و ..... ط لانه يشاهد في بداء الأمر

أن الخارج الأخير ط لا يحتوي على المتغير س لانه مساو

للواحد وحيث انه يوجد دائماً بين الدلالات ق ، ق و ق و ..... ق ن

المعادلات ق = ق و ك - ق ، ق و = ق ك - ق و ..... ق ن

فيتحصل من قسمة هذه الخوارج على ق

ط = ط ك - ط ، ط و = ط و ك - ط و ..... ط ن ومن هنا يؤخذ

كما في (ص ٢٨٧) انه اذا انعدمت بواسطة مقدار مفروض

للمتغير س واحدة من الدلالات ط و ط و ..... ط ن

فلا يمكن بواسطة هذا المقدار انعدام واحدة من الدلالتين

المتجاورتين بل يكون لهما اشارتان مختلفتان في العلامة

اعني انه اذا كان ط مثلاً المعادلة ط = ٠ كانت الدلالتان

يتحقق بها ايضاً المعادلة (١) المتقدمة (في ٢٨٦) شوهد انه
اخذ المتغير س في الازدياد حتى وصل أو زاد عن مقدار كالمقدار
الذي به تنعدم الدلالة ق امكن انخارج قسمة $\frac{ق}{ق_١}$
من السلب الى الايجاب أو من الايجاب الى السلب أو أنه يكون
لازماً العلامته الأصلية فأما في الحالة الاولى وهي الانتقال
السلب الى الايجاب فان جملة علامات الدلالات ق و ق و ق
..... و ق يترتب عليها انعدام مغايرة من جهتها اليمنى وأما
في الحالة الثانية وهي الانتقال من الايجاب الى السلب فانه يترتب
عليها زيادة مغايرة في جهتها اليسرى وأما في الحالة الثالثة
وهي أن الخارج يكون ملازماً العلامته الأصلية فان عدد مغايرات
جملة العلامات المذكورة لا يتغير وحينئذ لا ينشأ عن انعدام
واحدة من الدلالات المتوسطة بين الدلالتين ق و ق زيادة
ولا نقص في عدد المغايرات ومن هنا تستنبط النظرية الآتية
التي تستعمل بدل النظرية المتقدمة (في ٢٨٧) عندما تكون الدلالة
ق ليست مشتقة من الدلالة ق
وأما الفرق بين عدد ما للدلالة ق = . من الجذور المحصورة

لعددين ل و ے التي [illegible] بالنسبة البها خارج قسمة ق
[illegible] الى الايجاب وعدد [illegible] ما معادلة من الجذور المحصورة
ل و ے التي يفتقر [illegible] ما خارج لقسمة المذكورة
لايجاب الى السلب فانه [illegible] مساويا للفرق بين عدد
المغايرات المتحصلة من جملة علامات الدلالات ق، ق، ق، ق
[illegible] ق في فرض س = ل وبين عدد مغايراتها في فرض
س = ے

حينئذ لا يمكن ان يكون عددا ما للمعادلة ق = ٠ من الجذور المحصورة
بين ل و ے أصغر من الفرق الكائن بين عددي المغايرات
[illegible] وانما يمكن ان يكون مساويا له أو اكبر منه بعدد زوجي
[illegible] لكي يكون مساويا له بالضبط ان تكون الدلالة ق مشتقة
[illegible] الدلالة ق أو أن تكون دلالة متحدة في العلامة مع هذه
[illegible] او مخالفة معها في العلامة بالنسبة لكل مقدار حقيقي
[illegible] للمتغير س ويكون محصورا بين ل و ے وعليه يترتب
[illegible] الدلالة ق وحيث ان مثل هذه الدلالة ليست معلومة
[illegible] الامر فيلزم أن تؤخذ بدل الدلالة ق الدلالة المشتقة

لان الدلالات ق و ق و ق و ق و الخ المساوية بالتناظر للدلالات
ط و ط و ط و ط و الخ مضروبة فى ق تكون بالنسبة لمقدار
مخصوص مفروض فيها للمتغير س متحدة فى العلامة مع الدلالات
ط و ط و ط و ط و الخ أو متخالفة معها فى العلامة بحسب ما تكون
الدلالة ق موجبة أو سالبة بالنسبة لهذا المقدار وبناء
على ذلك يكون عدد المغايرات المتحصلة من علامات الدلالات
ق و ق و ق و ق و الخ بالنسبة لأى مقدار يفرض للمتغير س مساويًا
دائمًا لعدد المغايرات المتحصلة من علامات الدلالات ط و ط
و ط و ط و الخ

وحينئذ اذا فرض بالتوالى للمتغير س فى الدلالات ق و ق و ق
و .... و ق المقداران ل و ے (بجعل ل اصغر من ے)
كان الفرق الذى يزيد به عدد المغايرات المتحصلة من فرض
س = ل عن عدد المغايرات المتحصلة من فرض س = ے
مساويًا لعدد الجذور المختلفة للمعادلة ق = ٠ المحصورة
بين ل و ے وذلك بقطع النظر عن درجة تكرار كل جذر
سيد ولنقصد لذكر واحدة من الملحوظات المتنوعة التى ابداها

المهندس

هندس اسطودم فى نظريته فنقول

ثبت أن ق دلالة مشتقة من ق فيشاهد كما تقدم انه
اذا انعدمت الدلالة ق هذه فى فرض س = ح كانت متخالفة
بالعلامة مع الدلالة ق فى فرض س = جـ - و ومتحدة معها
بالعلامة فى فرض س = ح + و ويمكن لبيان ذلك أن يقال
على وجه الاختصار ان خارج قسمة $\frac{ق}{ق}$ ينتقل دائماً من السلب
الى الايجاب متى انعدمت الدلالة ق

فنفرض الآن ان الدلالة ق ليست مشتقة من الدلالة ق
وانها تكون كثيرة الحدود درجتها دون درجة ق وانها
لا تحتوى على مضروب حقيقى بدرجة اولى ليكون مشتركاً بينها
وبين ق فانه يمكن استخراج تكملة الكثيرة الحدود ق
التى تكون كثيرة الحدود اخرى كالمكملات ق، ق، ق، الخ
التى تكون دونها فى الدرجة وتكون درجتها مكونة لمتوالية
تنازلية وذلك بواسطة عمليات قسمة متوالية كما سبق فى
تكملة الكثيرة الحدود المشتقة (٢٢٢)

واذا لوحظت الجملة المتكونة من الدلالات ق، ق، ق، ... ق

ط و ب [illegible]

فى العلامة فى فرض س = ح − و و [illegible]

فى فرض س = ح + و

مثلا اذا فرض أن

ق = (س − ح)^{ج} (س − د)^{ج'} (س − هـ) (س − ج)

حدث (كما فى [illegible])

$$ق = (س - ح)^{ج-1} (س - د)^{ج'-1} \times \left\{ \begin{array}{l} ج (س - د)(س - هـ)(س - ج) \\ + ج' (س - ح)(س - هـ)(س - ج) \\ + (س - ح)(س - د)(س - ج) \\ + (س - ح)(س - د)(س - هـ) \end{array} \right.$$

وبملاحظة ان ق = (س − ح)^{ج−1} (س − د)^{ج'−1} يوخذ من مقدار

ق و ق فى المتقدمين

ط = (س − ح)(س − د)(س − هـ)(س − ج)

$$ط = \left\{ \begin{array}{l} ج (س - د)(س - هـ)(س - ج) + ج' (س - ح)(س - هـ)(س - ج) \\ + (س - ح)(س - د)(س - ج) + (س - ح)(س - د)(س - هـ) \end{array} \right.$$

اذا تقرر

[illegible]

صفر) كان [illegible] المضروب

س - ح مفقود وبرصفر وجد وبناء على ذلك تكون الدلالة ط

متحدة في العلامة مع حاصل الضرب ؟ (س - ء) (س - م) (س - ق)

فإذا يكون هذا الحاصل مخالفاً في العلامة مع الدلالة ط لان

المضروب س - ح يؤول الى الكمية السالبة [illegible] وإذا

الدلالتان ط و ط مختلفتين في العلامة فان فرض

ان س = [illegible] و آل المضروب س - ح الى + و وكانت

الدلالتان ط و ط متحدتين في العلامة

ومن هنا يؤخذ انه اذا فرض ان المتغير س يأخذ بالتوالي في

الدلالات ط و ط و ط و الخ المقداران ل و ے (بجعل

ل اصغر من ے) كان الفرق الذي يزيد به عدد المغايرات

المتحصلة من فرض س = ل عن عدد المغايرات المتحصلة من

فرض س = ے مساوياً لعدد الجذور الحقيقية للمعادلة

ط = ٠ المحصورين بين ل و ے

ق اذا اردنا تعيين الجذور الحقيقية للمعادلة ق = ٠ مع مزيد الضبط

في الطريقة التقريبية للمهندس نوتون

بند ٩٣ متى علم ان جذر معادلة محصور بين عددين كالعددين ل و ے
وكان لا يخصص بين هذين العددين الا جذر واحد فاسهل طريقة
توصل الى اقرب مقدار لهذا الجذر هي ان يوضع على التوالي بدل المتغير
في المعادلة اعداد اخر محصورة بين العددين المذكورين مثلاً
اذا فرض انه وضع بدل المتغير عدد كالعدد لا المحصور بين العددين
ل و ے علم من علامة الناتج هل الجذر محصور بين العددين
ل و لا او بين العددين ے و لا فان كان محصوراً بين العددين
ے و لا فانه يوضع فيهما بدل المتغير كمية كالكمية ق ومن
هنا يعلم هل الجذر محصور بين ے و ف او بين لا و ف
وبتوالي عملية حصر الجذر بهذه المثابة يتوصل الى تقدير
هذا الجذر بالتقريب المطلوب ومتى تحصل بالطريقة المذكورة
مثل هذا التقريب سهل توالي العمل بالطريقة الآتية المنسوبة
للمهندس نوتون وهي
ليفرض هنا انه يراد تحصيل مقدار يكون دون الجذر بمنزلة اعشارية
مجـ

فاذا مر

فاذا رمزنا لهذه الكمية التفريقية بالرمز [illegible] والمعادلة بالدلالة ء(س)=٠

وفرض أن س = ء + ص [illegible] سلسلة محتوية على ص [illegible]

(أ) ... ء(ح) + ء'(ح) ص + ء''(ح) $\frac{ص^{٢}}{٢×١}$ + ء'''(ح) $\frac{ص^{٣}}{٣×٢×١}$ + [illegible] = ٠

واذا استخرج من هذه المعادلة مقدار ص بفرض الكميات ص، ص^{٢}، ص^{٣}، [illegible] معلومة حدث

(ب) ... ص = $\frac{ء(ح)}{ء'(ح)}$ − $\frac{١}{ء'(ح)}$ ء''(ح) $\frac{ص^{٢}}{٢×١}$ + ء'''(ح) $\frac{ص^{٣}}{٣×٢×١}$ + [illegible]

وحيث ان مقدار ص الذى يراد تحصيله كمية دون العشر مثلا فيكون

أى [illegible] ص^{٢} أقل من [illegible] ولذا نهمل فى

مقدار ص [illegible] الثانية [illegible] القوى فيكون

[illegible]

ثم [illegible] ويضاف الناتج الى الكمية ح

[illegible] هذه المتتابعة وفرض

[illegible] واجرت على

هذا [illegible] وجعل ص رمزا للناتج

الذى يلزم اضافته الى [illegible] المطلوب حدث

[illegible]

وحيث أن مقدار ص المتحصل هو كمية دون $\frac{1}{100}$ فتكون كلتا الكميتين ص، و ص٢ اقل من $\frac{1}{10000}$ ولذا يحسب مقدار ص الى $\frac{1}{10000}$ ثم يضاف الناتج الى الكمية أ

فان كان مقدار س المتحصل مقرباً من $\frac{1}{10000}$ فانه يستعمل بهذه المثابة في حساب مقدار تقريبي آخر وفي هذه الحالة تجرى عملية القسمة التقريبية الى الخانة الثامنة من الاعشار ثم يتوالى العمل على هذا المنوال ويضعف في كل عملية عدد اعشار مقدار س الى ان يتوصل الى درجة التقريب المطلوبة

وينبغي في العمل ان يلاحظ ان التقاريب المتوالية تعلم كلها من قانون واحد وحينئذ اذا وضع على العموم

$$ص = -\frac{ء(س)}{ء'(س)}$$

لزم في مبدأ الأمر ان يوضع ح بدل س ثم يحسب مقدار ص الى $\frac{1}{100}$ ويضاف الناتج الى ح فيتحصل من ذلك المقدار الثاني التقريبي للكمية ح ثم يوضع ح بدل س ويحسب مقدار ص الى $\frac{1}{10000}$ ويضاف الناتج الى ح فيتحصل من ذلك المقدار الثالث التقريبي وهلم جرا

سند ولكي تكون هذه الطريقة مضبوطة يلزم ان يتحقق انه اذا عدم
مقدار ص ووضع بدله في المعادلة فلا يكون للحدود المحتوية
على ص و ص٢ و ص٣ الخ ارتباط بالاجزاء المائية من مقدار الطرف الاول
من هذه المعادلة وحيث أنه لا يتأتى مثل ذلك في كثير من الأحوال
وانه ربما تحصل بدل المقدار التقريبي الذي يراد تحصيله للجذر
مقدار يبعد عن المقدار الحقيقي بكثير فيلزم حينئذ ان يحقق بعد كل
تقريب هل جميع الأعشار التي حسبت تنسب كلها المقدار الجذر
المطلوب ام لا

فاذا لوحظ في مبدأ الأمر المقدار ء الحادث من التقريب
الأول المبين برقمين اعشاريين فانه يلزم ان يوضع هذا
المقدار بدل المتغير في المعادلة واذا علم بواسطة علامة الناتج
عند مقارنتها بعلامات النواتج الحادثة من الاستبدالات
التي اجريت فيما سبق ان الجذر اكبر من الكمية ء أو أصغر منها
لزم أن يوضع في المعادلة بدل المتغير ء + ١/١٠٠ أو ء − ١/١٠٠
فاما ان كان الناتج الحادث من هذا الاستبدال الثاني مخالفا
في العلامة مع الاستبدال الأول فانه يثبت ان الكمية ء لا تختلف

عن الجذر الاعتبار $\frac{1}{100}$ واما ان كان الناتجان متحدين في العلامة فانه يعلم من ذلك ان التقريب فيه خطأ أو أنه غير كاف وحينئذ يلزم لاستعمال الطريقة نوتون أن يبدأ بمقدار مقرب بقدر الامكان وذلك بان يبحث عن رقم الاجزاء المائينية بالمثابة المقررة في اول البند السابق

وعلى هذا المنوال يجرى العمل في المقادير الحادثة من باقي التقاريب أعني انه يلزم بعد اجراء كل عملية ان يوضع في مبدأ الأمر بدل المتغير المقدار المتحصل ثم يوضع بدل المتغير ايضاً هذا المقدار مضافاً اليه أو مطروحاً منه رقم آخر مرتبة فان كان لا يتحصل من التقريب الثاني الذي يؤخذ فيه أربعة ارقام اعشارية مقدار مقرب من المقدار الحقيقي بكمية اقل من $\frac{1}{10000}$ قطع النظر عن الرقم الاعشاري الأخير وان كانت الارقام الباقية مضبوطة اجريت عملية تقريب آخر ممتد الى $\frac{1}{100000}$ لكنه يقطع النظر فيه بعد العمل عن رقم أو رقمين من الارقام الاعشارية وبالجملة فلا يلزم تحقيق كل تقريب على الفور لان طريقة الحساب تكفي في الاعمال غالباً لبيان التقاريب المحتوية على الخطأ أو لتصحيح التقاريب

التي

التي ليست كافية وبناء على ذلك اذا لم نطرح عمليات الزائدة لحول
متناقضة أمكن الاقتصار في العمل على تحقيق وحدة وذلك بأن نحسب
في مبدء الأمر الارقام الاعشارية الكافية للمقدار التقريبي المطلوب
ولنمثل لذلك بالمعادلة

س³ − ٢ س − ٥ = ٠

التي يشاهد بمقتضى ما تقدم انه لا يوجد لها غير جذر حقيقي
واحد محصور بين ٢ و ٣ اذا بحثنا عنه بموجب هذه الطريقة
نحصل

س = ٢٫٠٩٤٥٥١٤٩

في الطريقة التقريبية للمهندس لاجرانج

يسند الطريقة التقريبية للمهندس لاجرانج لا تؤخذ منها
عين الفائدة التي تؤخذ من طريقة المهندس نيوتن من جهة
الاختصار في الاعمال لكنها مجردة عن الخطأ
مثلاً اذا فرض أن جـ و جـ + ١ كناية عن عددين متواليين
محصور بينهما جذر واحد للمعادلة وفرض أن س = جـ + $\frac{١}{ص}$
فان المعادلة الناتجة المحتوية على ص كالمعادلة الناتجة جذرا اكبر من الو

ولا يوجد بين جذور هذه المعادلة الا جذر واحد اكبر من الواحد لانه لو كان الامر بخلاف ذلك لوجد للمتغير س عدة مقادير محصورة بين العددين المتواليين ح و ح + ١ وهذا مخالف للفرض وحينئذ يمكن تعيين الجزء الصحيح من مقدار س بأن نوضع بالتوالي في المعادلة المحتوية على س الاعداد الصحيحة ١ و ٢ و ٣ وهكذا الى أن يحصل ناتجان متخالفان في العلامة

واذا فرض أن ء و ء + ١ كناية عن العددين اللذين يحدث منهما الناتجان المتخالفان في العلامة وجعل س = ء + $\frac{١}{ز}$ فان المعادلة الناتجة المحتوية على ز لا يكون لها غير جذر اكبر من الواحد وحينئذ يمكن تعيين الجزء الصحيح من مقدار ز بواسطة اجراء عملية مشابهة للعملية التي اجريت على س فان كان هـ هو الجزء الصحيح من مقدار ز جعل ز = هـ + $\frac{١}{و}$ وهلم جرا

وبناء على ذلك يتوصل بواسطة مثل هذه الحسابات الى مقدار للمتغير س يكون مبينا بالكسر المتسلسل

س =

$$س = حـ + \frac{١}{ء + \frac{١}{حـ + \text{ﺥ}}}$$

٢٩٦ ويمكن حساب المعادلات المحولة المتوالية المحتوية على ص و ع ز و ﺥ بواسطة المشتقات المتقدمة (في بند ٢٩٥) وحيث ان المعادلة المفروضة مبينة بالصورة ء (س) = ٠ فتكون المعادلة المتحصلة من فرض س = حـ + $\frac{١}{ص}$ مبينة بالصورة

$$ء(حـ) + ءَ(حـ)\frac{١}{ص} + \frac{ءَ'(حـ)}{٢}\frac{١}{ص^{٢}} + \frac{ءَ''(حـ)}{٢\times٣}\frac{١}{ص^{٣}} + \text{ﺥ} = ٠$$

واذا صدفت المقامات بواسطة ضربها في ص^(و م هو كناية عن درجة المعادلة) فانه يتحصل من ذلك

$$ء(حـ)ص^{م} + ءَ(حـ)ص^{م-١} + \frac{ءَ'(حـ)}{٢}ص^{م-٢} + \frac{ءَ''(حـ)}{٢\times٣}ص^{م-٣} + \text{ﺥ} = ٠$$

واذا رمز للطرف الأول من هذه المعادلة بالرمز هـ (ص) آلت المعادلة المحولة الى

$$هـ(ء)ز^{م} + هـَ(ء)ز^{م-١} + \frac{هـَ'(ء)}{٢}ز^{م-٢} + \frac{هـَ''(ء)}{٢\times٣}ز^{م-٣} + \text{ﺥ}$$

ومثل ذلك يجري في باقي المعادلات المحولة

٢٩٧ ومتى كان يوجد بين العددين حـ و حـ + ١ عدة جذور

للمعادلة المفروضة كان للمعادلة المحولة المحتوية على ص المتحصلة من فرض س = ح + $\frac{1}{ص}$ عدة جذور اكبر من الواحد وحينئذ لايكون وضع الاعداد الصحيحة ١، ٢، ٣ ... الخ بدل ص كافيا لتعيين الاجزاء الصحيحة من مقادير ص لكن متى استخرجت الجذور بأى طريقة سهل دائما معرفة العدد الذى يلزم ان تضرب فيه الجذور المحصورة بين تلك الاعداد الصحيحة لكى تتبدل بأعداد اخرى تكون اجزاؤها الصحيحة مختلفة عن بعضها وبهذه المثابة يؤول دائما حساب المقادير التقريبية للجذور بواسطة طريقة لاجرانج الى ما سبق فاذا لم تكن فروق الجذور المحصورة بين العددين الصحيحين المتواليين ح و ح+١ كسورا صغيرة فانه يمكن اجراء العملية على المعادلة المفروضة كما فى المثال الثانى

المثال الاول

بند ٢٩٨ اذا فرضت المعادلة

س^٣ - ٢س - ٥ = ٠

شوهد أن هذه المعادلة ليس لها الا جذر حقيقى واحد محصور بين

بين ٢ و ٣ (كما تقدم في بند ٤) فاذا فرضنا ص = ٢ + $\frac{١}{\text{حد ش}}$

و (٢) = ٢^{٣} − ٥ × ٢ − ٢ = −١ ه

و′ (٢) = ٣ × ٢^{٢} − ٥ = ٧ ه

$\frac{١}{٢}$ و″ (٢) = ٣ × ٢ = ٦ .

$\frac{١}{٢ \times ٢}$ و‴ (٢) = ١

ومن هنا نوجد المعادلة المحولة

ص^{٣} − ١٠ ص^{٢} − ٦ ص − ١ = ٠

التي يشاهد فيها بالسهولة من غير اجراء عملية الاستبدال انه يحدث من ص = ١٠ ناتج سالب وحيث انه يحدث من ص = ١ ناتج موجب (كما تقدم في بند ٤٦) فيكون مقدار المتغير ص محصوراً بين ١٠ و ١١ وحينئذ اذا فرض ان ص = ١٠ + $\frac{١}{ش}$ حدث

هـ (١٠) = ١٠^{٣} − ١٠ × ١٠^{٢} − ٦ × ١٠ − ١ = −٦١ ه

هـ′ (١٠) = ٣ × ١٠^{٢} − ٢ × ١٠ × ١٠ − ٦ = ٩٤ ه

$\frac{١}{٢}$ هـ″ (١٠) = ٣ × ١٠ − ١٠ = ٢٠ ه

$\frac{١}{٢ \times ٣}$ هـ‴ (١٠) = ١

ومن هنا نوجد المعادلة المحولة الثانية

٦١ ز^٣ − ٩٤ ز^٢ − ٢٠ ز − ١ = ٠

التي يتحصل منها مقدار موجب بفرض ز = ٢ وحينئذ يكون مقدار ز محصوراً بين ١ ، ٢ وعلى ذلك اذا جعل ز = ١ + ١/و حيث

ت(١) = ٦١ × ١^٣ − ٩٤ × ١^٢ − ٢٠ × ١ − ١ = −٥٤ ، و

ت'(١) = ١٨٣ × ١^٢ − ١٨٨ × ١ − ٢٠ = −٢٥ ، و

½ ت''(١) = ١٨٣ × ١ − ٩٤ = ٨٩ ، و

١/(٣×٢) ت'''(١) = ٦١

ومن هنا نوخذ المعادلة المحولة الثالثة

٥٤ و^٣ + ٢٥ و^٢ − ٨٩ و − ٦١ = ٠

التي يعلم منها ان مقدار و محصور بين ١ ، ٢ وبتوالي العمل على قدر الكفاية يشاهد أن الجذر المطلوب مبين بالكسر المتسلسل

$$س = ٢ + \cfrac{١}{١٠ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{٢ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{٣ + \cfrac{١}{١ + \text{الخ}}}}}}}}$$

الاى

[illegible]

[illegible]

[illegible]

التي يلزم ان يكون لها جذران أحدهما محصور بين ٢ و ٣ والآخر بين ٣ و ٤

فاذا اجريت على هذه المعادلة عملية كعملية المثال السابق شوهد أن جذرها الأول مبين بالكسر المتسلسل

$$٢ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{٢ + \cfrac{١}{٢ + \cfrac{١}{٤٠ + \text{ج}}}}}$$

وبأخذ الآئلة الخامسة يستخرج من هذا الكسر مقدار مقرب من الجذر بأربعة أرقام اعشارية هو المقدار ٢٫٧١٣٨ ويكون جذرها الثاني المحصور بين ٣ و ٤ مبينًا بالكسر المتسلسل

$$٣ + \cfrac{١}{٢ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{٩ + \text{ج}}}}}}}}$$

وبأخذ الآلة السابعة يستخرج من هذا الكسر مقدار مقرب من الجذر بأربعة ارقام اعشارية هو المقدار ٣٫٣٨٩٠

ومن هنا يؤخذ أن مقداري الجذرين الموجبين من المعادلة المفروضة المقربين بأقل التقريب من $\frac{1}{10000}$ يكونان مبينين بالمقدارين

١٫٢٥٦٩ و ٦٫٩٢٠

واذا اريد حساب الجذر السالب يوضع − س بدل س في المعادلة المفروضة فتؤول الى

$$س^3 - 7س - 7 = 0$$

ومنها يحدث

$$س = 2 + \frac{1}{20 + \frac{1}{3 + \text{ج}}}$$

ويمكن الاستغناء عن حساب هذا الجذر الثالث لان مجموع الجذرين لما كان بعدوما كان المقدار المطلق للجذر السالب مساويا لمجموع الجذرين الموجبين

ويمكن ايضا حساب الجذرين الموجبين بدون أن يطرأ على المعادلة اد تحويل لان أحدهما محصور بين ١ و ٢ والآخر بين

ج = و ، فاذا فرض أن س = ١ + $\frac{١}{ص}$ كان للمجهول ص مقداران موجبان أحدهما أكبر من ، والآخر محصور بين ١ ، ، وحينئذ تكون المعادلة الحادثة من وضع ١ + $\frac{١}{ص}$ بدل س مبينة بالصورة س^{٣} − ٤ ص^{٢} + ٣ ص + ١ = ٠ . فان فرض أن ص = ١ كان الناتج موجبًا وان فرض أن ص = ، كان الناتج سالبًا وان فرض أن ص = ٣ كان الناتج موجبًا وبناء على ذلك يكون الجزء الصحيح من أكبر مقدار يفرض للمتغير ص هو ، واذا جعل ص = ، + $\frac{١}{ر}$ و ص = ١ + $\frac{١}{ر}$ تحصل من ذلك معادلتان محولتان يكون لكل واحدة منهما جذرا أكبر من الواحد

الباب الحادى عشر

فى طريقة الحذف المتعلقة بحل معادلتين بدرجة ما من المعادلات ذات المجهولين وفى المعادلة التفاضلية وفى صورة المعادلات ذات المجهولين

بند ٢٠٤ اى معادلة ذات مجهولين بدرجة م . ان كانت مرتبة بحسب

واحد

[illegible]

[illegible] ... هـ ص + ك ص + هـ ص ... [illegible]

وحيث أن م يدل على درجة المعادلة فيكون [illegible] حركية غير محتوية على ص و ك حركية محتوية على ص [illegible] درجة أولى و هـ حركية محتوية على ص بدرجة ثانية و [illegible] الثالثة ك التي تحتوي على ص بدرجة لا يزيد [illegible] عن م ومن هنا يؤخذ في الحالة التي تكون فيها المعادلة تامة الحدود

$$ء = ء_0 + ء_1 ص \quad و$$

$$هـ = هـ_0 + هـ_1 ص + هـ_2 ص^2 \quad و$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \quad و$$

$$ك = ك_0 + ك_1 ص + ك_2 ص^2 + ك_م ص^م$$

وحينئذ توضع المعادلة العمومية ذات المجهولين التي درجتها م بالصورة

$$(1) \quad \{ هـ ص^م + (ء_0 + ء_1 ص) ص^{م-1} + (هـ_0 + هـ_1 ص + هـ_2 ص^2) ص^{م-2} + \cdots\cdots$$

$$+ ك_0 + ك_1 ص + \cdots\cdots + ك_م ص^م = 0$$

فاذا فرض أن م = ١ تحصلت المعادلة العمومية ذات المجهولين

التي بدرجة ثانية

حـ س + (ب + ب ص) س + جـ + جـ ص + جـ ص = ٠

سيد وحيث أن المعادلة لا تتغير بقسمة جميع حدودها على عدد واحد فيفرض أن مكرر واحد من حدود المعادلة (٤) كمكرر الحد الأول مثلاً يساوي الواحد لكن إذا جعل حـ = ١ تغيرت الصورة العمومية للمعادلة لأنها لا تكون حينئذ مشتملة على المعادلات ذات الدرجة م التي تكون محتوية على القوة المميمة للمجهول س

سيد فإذا لزم تعيين مكررات معادلة عمومية ذات مجهولين على وجه بحيث تحصل من ذلك معادلة خصوصية تكون محققة للشروط المطلوبة فانه يمكن ان يفرض أن مكرر احد حدود المعادلة التي يراد تحصيلها يكون مساويًا للواحد فان لم يُسلم هذا الفرض كان واحد من المكررات المجهولة اختياريًا وعندما تحصل مقادير سائر المكررات التي تتعين بواسطة هذا المكرر الاختياري وتوضع في المعادلة العمومية يصير هذا المكرر الاختياري معروفًا مشتركًا في جميع الحدود فيحذف

ومن هنا يؤخذ أن عدد الشروط اللازمة لتعيين معادلة تامة

بدرجة م

م ذات مجهولين ينقص بواحد عن عدد مكررات المعادلة ،
بناء على ذلك يكون هذا العدد مبيناً بالصورة
ن + ن + ٤ + ٣ + ٢ + ١ + ... + (م + ١) أو $\frac{1}{2}$ م (م + ٣)
من أن احد المكررات المجهولة مساو للواحد فيلزم لتحصيل مقادير باقي
ت ان تكون المعادلة المطلوبة محتوية على حد مسبوق بمكرر
للفرض المتقدم فان تعذر الحصول على ذلك ترتب على هذا
يجعل مقادير باقي مكررات غير محدودة ولذا يؤثر اجتناب
من قبل الحل

ملحوظات اولية تتعلق بحل معادلتين من المعادلات ذات المجهولين

اذا اريد حل معادلتين من المعادلات المحتوية على المجهولين
ص وكان س داخلاً في واحدة منهما بدرجة اولى
باشرة استخراج مقدار س من هذه المعادلة بالنسبة
ن ثم يوضع هذا المقدار في المعادلة الاخرى فتحدث من
معادلة تكون محتوية الا على ص وحينئذ اذا علمت
ر ص ووضعت على التوالي في مقدار س المستخرج

بالنسبة الى ص تحصلت مقادير المتغير س المطابقة لهذه القادير

ويمكن ايضاً استعمال هذه الطريقة في الحالة التي تكون فيها احدى المعادلتين محتوية على المتغير س بدرجة ثانية وهذه المعادلة يتحصل منها لهذا المتغير مقداران هما ج + √ك ، ج − √ك (بجعل ج ، ك رمزين للدلالتين المنطقتين للمتغير ص) فاذا وضع كل واحد من هذين المقدارين بالتوالي في المعادلة الثانية بدل المتغير س تحصلت من ذلك معادلتان كلتاهما محتوية على ص وحينئذ تؤخذ من حل هاتين المعادلتين جميع مقادير ص المحققة للمعادلتين المذكورتين وبناء على ذلك توضع المعادلة الحادثة من وضع ج + √ك بدل المتغير س في المعادلة الثانية من المعادلتين المفروضتين بالصورة

(١) ..... ج + ك √ك = ٠

(بجعل ج ، ك كناية عن دلالتين منطقتين للمتغير ص)

وحيث ان المعادلة الحادثة من وضع ج − √ك بدل المتغير لا تختلف عن المعادلة السابقة الا بعلامة الجزء غير المنطق فيحدث

(٢) ..... ج − ك √ك = ٠

فاذا

فاذا ضربت هاتان المعادلتان فى بعضهما طرفاً بطرف تحصلت من ذلك معادلة مجردة عن العلامات الجذرية هى

$(ج + ك\sqrt{ب})(ج - ك\sqrt{ب}) = ٠$ أى $ج^٢ - ب ك^٢ = ٠$

ويمكن لتحصيل جميع مقادير ص التى تحققها المعادلتان الاوليان ان نحل هذه المعادلة الأخيرة وهذه المعادلة يمكن استنباطها من المعادلتين (١) و (٢) لانه اذا حول كل من هذه المعادلات الجزء غير المنطق الى الطرف الثانى من كل معادلة ورفع كل منهما الى الدرجة الثانية حدث

$ج^٢ = ب ك^٢$ ومن هنا يحدث $ج^٢ - ب ك^٢ = ٠$

ومتى علمت مقادير ص تحصلت مقادير س بواسطة هذه القاعدة وهى

بند ٢٠٢ اذا تحللت الاطراف الاول من المعادلتين المفروضتين مضاريب منطقة بالنسبة للمجهولين آلت جملة هاتين المعادلتين الى حل عدة جمل أخرى أبسط منها ولبيان ذلك يرمز الى المفروضة بالمعادلتين $م = ٠$ و $ن = ٠$ ويفرض أن $م = ع ع' ع''$ و $ن = ق ق' ق''$ (بجعل $ع$ و $ع'$ و $ع''$ و $ق$ $ق'$ و $ق''$ رموزاً

للمناريب المنطقة بالنسبة للمجهولين س و ص) تتحصل من الجملة جـ = ٠ و جـ = ٠ بالبحث عن حلول الجمل المتنوعة الآتية وهي

ى = ٠	ى = ٠	ى = ٠	ى = ٠	ى = ٠
ق = ٠	قَ = ٠	ق = ٠	قَ = ٠	ق = ٠	قَ = ٠

فاذا فرضت مثلاً المعادلتان

ش − ٢ص س + ص − ١ = ٠ و ش + ٢ س ص + ص − ١٠ س − ١٠ ص + ١٢ = ٠

فانه يشاهد بالسهولة ان الطرف الأول من المعادلة الاولى يؤول الى (س − ص)² − ١ أي (س − ص + ١) (س − ص − ١)

واذا اريد الوقوف على هذه الحقيقة وهي هل يمكن تحليل المعادلة الثانية الى مناريب منطقة تحل هذه المعادلة بالنسبة الى س فيحدث

س = − ص + ٥ ± ٢

ومن هنا ينتج

ش + ٢ س ص + ص − ١٠ س − ١٠ ص + ١٢ = (س + ص − ٧) (س + ص − ٣)

وحينئذ تحصل من حلول الجملة المفروضة بواسطة حل هذه الجمل الآتية

س − ص + ١ = ٠	س − ص + ١ = ٠	س − ص − ١ = ٠	س − ص − ١ = ٠
س + ص − ٧ = ٠	س + ص − ٣ = ٠	س + ص − ٧ = ٠	س + ص − ٣ = ٠

بطريق التوالى

بند اذا كانت الاطراف الاول من المعادلتين المفروضتين يحتوى على مضروب مشترك تحققت المعادلتان بكل اثنين من هذه الجمل الاربعة التى يترتب عليها جعل هذا المضروب المشترك مساويًا للصفر وحينئذ يحصل من ذلك عدد غير محدود من الحلول فاذا كان المضروب المشترك لا يحتوى الا على س فبجعل مساويًا للصفر تحدث منه معادلة يتعين بها عدد محدود من مقادير س يمكن ان تنضم اليها أى مقادير مفروضة لمتغير ص واذا كان المضروب المشترك لا يحتوى الا على ص فانه ينتج منه مقادير معينة للمتغير ص يمكن ان تنضم اليها أى مقادير مفروضة للمتغير س واذا كان المضروب المشترك مشتملاً على المتغيرين س و ص فبجعله مساويًا للصفر تحدث منه معادلة يمكن ان تعوض فيها لاحد المتغيرين مقادير اختيارية بها تتعين مقادير المتغير الآخر

بند ولنمثل المعادلتين اللتين يوجد بينهما مضروب مشترك
لا يحتوى الا على واحد من المجهولين بمثال هو

(ص - ١) س + (٢ص - ٢ص) س + ص - ٢ص + ١ = ٠ و

(ص - ٢ص + ٢) س - ص - ٢ص + ٧ص + ١٥ص - ١٨ = ٠

فاذا اجريت عملية الحسابات اللازمة لايجاد القاسم المشترك
الأعظم بين المكررات المتنوعة لقوى س وبين الاجزاء التى لا تشتمل
على هذا المتغير فى المعادلة الاولى شوهد ان هذه الكميات تكون
قابلة للقسمة على ص - ١ أو (ص - ١)(ص + ١) وأن خارج قسمة
الطرف الأول من المعادلة على ص - ١ يساوى س + ٢ص س + ص - ١
وان الطرف الأول من المعادلة الثانية يكون قابلاً للقسمة على
الكمية ذات الحدود الثلاثة ص - ٢ص + ٢ المكافئة للكمية
(ص - ١) (ص - ٢) وان خارج القسمة يساوى س - ص - ٦ص - ٩
وحينئذ يمكن وضع المعادلتين المفروضتين هكذا

(ص - ١)(ص + ١)(س + ٢ص س + ص - ١) = ٠ و

(ص - ١) (ص - ٢) (س - ص - ٦ص - ٩) = ٠

وهاتان المعادلتان تتحققان بوضع ص = ١ مع اى مقادير
مفروضة

مفروضة للمتغير س

وتحصل باقى الحلول بواسطة الجمل الثلاث الآتية وهى

(١) ص + ١ = ٠ و ش − ش − ٦ ص − ٩ = ٠ و

(٢) ص − ٢ = ٠ و ش + ٢ ص س + ش − ١ = ٠ و

(٣) ش + ٢ ص س + ش − ١ = ٠ و ش − ش − ٦ ص − ٩ = ٠

فأما الجملة الاولى فيحصل منها للمتغيرين ص و س اربعة مقادير

ص = −١ و س = ٢ و ص = −١ و س = −٢

وأما الجملة الثانية فيحدث منها لهما اربعة مقادير هى

ص = ٢ و س = −١ و ص = ٢ و س = −٣

وأما الثالثة فيمكن حلها بعمليات حسابية مشابهة للعمليات التى

اجريت فى المثال السابق بحيث يحصل منها للمتغيرين س و ص

اربعة مقادير هى

ص = −١ و س = ٢ و ص = −٢ و س = ١

بند ٢٠٦ فاذا فرضت الآن المعادلتان

ش − ش − ٣ س ص + ٣ ش = ٠ و

٣ ش − ٢ س ص − ش = ٠

شوهد مباشرة انه يمكن وضع المعادلة الاولى بالصورة

(س - ص)(س² + س ص + ص² - ٢ ص) = ٠ والثانية بالصورة

س² - س ص + ص² = ٠ أو (س - ص)(٢ س + ص) = ٠

ومن هنا يؤخذ ان س - ص = ٠ فيكون للمعادلتين عدد غير محدود من الحلول

ويلزم لتحصيل باقي الحلول ان نحل المعادلتان

س² + س ص + ص² - ٢ ص = ٠ و ٢ س + ص = ٠

فيحصل من ذلك للمتغيرين س و ص مقداران هما س = ٠

و ص = ٠ (وهذان المقداران هما من حلول المعادلة س - ص = ٠)

ومقداران آخران هما س = $\frac{٩}{٧}$ و ص = $\frac{١٨}{٧}$

في الطريقة العمومية المتعلقة بحل معادلتين رقميتين بمجهولين

٢٠٧ اذا فرضت معادلتان بدرجة ما وبمجهولين كالمجهولين س و ص وكان س = ل و ص = ـــ حلا مشتركا بين هاتين المعادلتين وعوضنا عن وضع ل بدل س و ـــ بدل ص وضع ـــ بدل ص فقط تحصلت من ذلك معادلتان

لا تشتمل على المتغير س وهاتان المعادلتان تكونان محققتين
بالمقدار س = ل ولذا يكون للطرفين الاولين من المعادلتين
قاسم مشترك مشتمل على المضروب س - ل وحينئذ يقال
اذا علمت معادلتان بمجهولين لزم لكي يكون أي مقدار اختياري
مفروض لواحد من المجهولين كالمجهول ص مثلا محققاً لهاتين
المعادلتين انه اذا وضع هذا المقدار في المعادلتين كان للطرفين
الاولين قاسم مشترك هو دلالة للمجهول الآخر س وبالعكس
اذا كان للطرفين الأولين من المعادلتين بعد استبدال مقدار
ص قاسم مشترك هو دلالة س كان هذا المقدار المفروض
للمتغير ص يكون محققاً للمعادلتين فان جعل هذا القاسم المشترك
مساوياً للصفر تحصلت من ذلك معادلة جذورها هي المقادير
المطابقة للمجهول الآخر س

بند ٢٠٨ وبناء على ذلك يلزم لتحصيل الحلول المشتركة بين المعادلتين
المفروضتين ان تجري على طرفيهما الاولين بمقتضى القاعدة السابقة
العمليات التي يراد اجراؤها عليهما اذا اريد ايجاد قاسمهما المشترك
الأعظم

فاذا رمزنا الى هاتين المعادلتين بالصورتين جـ = [illegible]

وفرض أن درجة ء بالنسبة الى س لا تزيد عن درجة جـ

وأمكن اجراء عملية قسمة جـ على ء وكان خارج القسمة خاليًا عن المقامات المحتوية على ص بحيث لا يقتضي اجراء عملية تصليح بها يتحقق هذا الشرط وجعل ف رمزًا للخارج و ق رمزًا للباقي حدث

جـ = ء ف + ق

ومن هذه المتساوية يؤخذ ان جميع مقادير المجهولين المستخرجة من المعادلتين جـ = ٠ و ق = ٠ تكون محققة للمعادلة ق = ٠ لان الخارج ف لا يكون غير محدود في فرض المقادير المحدودة للمجهولين س ، ص وبمثل ذلك يبرهن على ان جميع المقادير المحققة للمعادلتين ء = ٠ و ق = ٠ تكون محققة ايضًا للمعادلة جـ = ٠ وحينئذ يمكن استخراج من المعادلتين جـ = ٠ و ء = ٠ بالمعادلتين ء = ٠ و ق = ٠ البسيطتين من هاتين المعادلتين اللتين درجة طرف احداهما وهو ق أقل من درجة طرف الاخرى وهو ء بالنسبة الى س

ولا يتأتى مثل ذلك اذا كان الخارج ف محتويًا على مقامات مشتملة على ص

[illegible] الصفر بخلاف الخارج فانه يصير
[illegible] ن يكون للحد ء × خ مقدار
مختلف [illegible] ان لا يكون ق مساويًا للصفر
[illegible] الكمية ج على الكمية ء اللتين
[illegible] حاصل قسمتهما ان تضرب الكمية الكبيرة
[illegible] ص فاذا رمز لهذا المضروب
بالرمز [illegible] وللخارج المتحصل بعد اجراء عملية التصليح بالرمز خ
وللباقي بالرمز ق حصل

هـ ج = ء خ + ق

ومن هذه المتساوية يوخذ أن حلول المعادلتين ء = ٠ و ق = ٠
لا تختلف عن حلول المعادلتين هـ ج = ٠ و ء = ٠ وحينئذ
تنقسم هاتان المعادلتان الى جملتين آخرين بينهما

ج = ٠ و ء = ٠ و هـ = ٠ و ء = ٠

وبناء على ذلك تكون المعادلتان ء = ٠ و ق = ٠ متحققتين
بجميع حلول المعادلتين المفروضتين وتتحققان ايضًا بجميع حلول
المعادلتين هـ = ٠ و ء = ٠ التى ربما كانت غير

محققة للمعادلة ج = ٠

وأما المعادلتان ء = ٠ و ق = ٠ فيجرى عليهما عملية مشابهة للعملية التى أجريت على المعادلتين ج = ٠ و ء = ٠ وبهذه المثابة تحصل معادلتان احداهما ق = ٠ والأخرى دونها فى الدرجة بالنسبة الى س وهاتان المعادلتان تحققان بجميع حلول المعادلتين ء = ٠ و ق = ٠ وبحلول أخرى غير هذه وبتوالى العمل هكذا يتوصل دائماً الى معادلتين احداهما غير محتوية على س فاذا تعينت جميع حلول هاتين المعادلتين تحصلت من ذلك جميع حلول المعادلتين المفروضتين وكذا حلول المعادلات الحادثة من اجراء عملية التصليح على المقاسيم المتوالية

بند ٣٠٩ فان وجدت فى الطرفين الاولين من المعادلتين المفروضتين مضاريب لا تشتمل الا على ص اختصرت العملية بحذف هذه المضاريب لكنه ينبغى ملاحظة الحلول التى يمكن تحصيلها من هذه المضاريب كما تقدم (فى بندى ٣٠٣ و ٣٠٤) ثم تحذف ايضاً من البواقى المتوالية المضاريب التى لا تشتمل الا على ص وتلاحظ الحلول المتحصلة منها

حيث انه لم يبق علينا الا بيان الكيفية التي يتوصل بها الى تكوين معادلتين لا تكونان محققتين [illegible] فنقول

اذا جعل هـ ، هـ١ رمزين لمضاربين [illegible] ص ، ص١ قسمة الطرفين الأولين من المعادلتين المفروضتين لجميع المضاربين المشتملة على ص ، هـ رمز المضروب الذي يلزم ان يضرب فيه هـ حتى لا تتغير قسمته على هـ١ ، ك رمز الخارج قسمتي على بعضهما و ر رمز الباقي ، ر١ جعل ر كناية عن حاصل ضرب مضاربين هذا الباقي المشتملة على ص ، و هـ١ رمز المضروب الذي يلزم ان يضرب فيه هـ١ حتى لا تتغير قسمته على ر ، و ك١ رمز الخارج قسمتهما على بعضهما و ر١ رمز الباقي ، ر١ جعل ر١ كناية عن حاصل ضرب مضاربين هذا الباقي المشتملة على ص ، وهلم جرا وفرض لمزيد الاختصار انه تحصل من القسمة الرابعة باق غير مشتمل على ص ورمز لهذا الباقي بالرمز ر٤ تحصلت من ذلك المتساويات

(١) .....

$$\begin{cases} \text{هـ}\,\text{ر} = \text{هـ}\,\text{ك} + \text{ر}\,\text{و} \\ \text{هـ}\,\text{ر}_1 = \text{ر}\,\text{ك}_1 + \text{ر}_1\,\text{و} \\ \text{هـ}\,\text{ر}_2 = \text{ر}_1\,\text{ك}_2 + \text{ر}_2\,\text{و} \\ \text{هـ}\,\text{ر}_3 = \text{ر}_2\,\text{ك}_3 + \text{ر}_3 \end{cases}$$

ولنفرض أن م رمز للقاسم المشترك الاعظم بين هـ ، و ، ر ، و١ م رمز للقاسم المشترك الأعظم بين $\frac{\text{هـ}}{\text{م}}$ ، و ، ر ، و٢ م رمز للقاسم المشترك الأعظم بين $\frac{\text{هـ}}{\text{م}_1}$ ، و ، ر ، و٣ م رمز للقاسم المشترك الأعظم بين $\frac{\text{هـ}}{\text{م}_2}$ ، و ، ر ، و٤ م رمز للقاسم المشترك الأعظم بين $\frac{\text{هـ}}{\text{م}_3}$

ص ، ثم نبرهن على أنه يمكن تحقيق جميع حلول المعادلتين جـ = ٠ و ء = ٠ الأخيرتين
بعد ضربهما وذلك بإدخال المعادلات

(٢) . [illegible]

ثم نبرهن في بعض الأمر على أن جميع حلول المعادلات [illegible] تكون محققة للمعادلتين
جـ = ٠ و ء = ٠ . ونبين بعد ذلك أن جميع حلول هاتين المعادلتين
من جملة حلول المعادلات (٢) فإذا قسم الطرفين الأولين من المعادلة الأولى
من المعادلات (١) على م تحصل المعادلة الآتية

(٣) . . . . . $\frac{ك}{م}$ جـ = $\frac{ك}{م}$ ء + $\frac{ك}{م}$ ص

وحيث أن $\frac{ك}{م}$ عدد صحيح لأن هـ و ء قابلان للقسمة على م
فيكون ك ء قابلاً للقسمة على م وحيث أن ء بالفرض
أولي مع م فيكون م قاسماً للخارج ك
ويؤخذ من المعادلة (٣) أن مقادير س و ص المحققة للمعادلتين
ء = ٠ و $\frac{ك}{م}$ = ٠ يترتب عليهما انعدام $\frac{ك}{م}$ جـ وحيث أن
$\frac{ك}{م}$ و $\frac{ك}{م}$ أوليان معاً فتكون هذه المقادير محققة للمعادلة
جـ = ٠ وبناء على ذلك تكون جميع حلول المعادلتين ء = ٠ و $\frac{ك}{م}$ = ٠
محققة للمعادلتين جـ = ٠ و ء = ٠ .

وتحصيل

يل ارتباط بين ء ، ص ، ر ، ء ، ك تضرب المعادلة (٣)

وفي المعادلة الناتجة يستعوض عن ء بالطرف الثاني

معادلة الثانية من المعادلات (١) فيحدث

$$\frac{\text{ص}}{\text{م}}\,\text{ء} = \left(\frac{\text{ص}\,\text{ر} + \text{ك}\,\text{ك}}{\text{م}}\right)\text{ر} + \frac{\text{ك}}{\text{م}}\,\text{ر}_1\,\text{ء}$$

ة $\frac{\text{ص}\,\text{ر} + \text{ك}\,\text{ك}}{\text{م}}$ عدد صحيح لان ر ، ص ، ك يقبلان

ة على م وهذه الكمية تقبل القسمة ايضاً على م لان

سم كلا من $\frac{\text{ص}}{\text{م}}$ ، ر_1 وهو أوّلي مع ر وعلى

اذا قسم كل من طرفي المعادلة المذكورة على م وجعل

به الاختصار

$$\frac{\text{ك}}{\text{م}} = \text{ح} \quad \text{و} \quad \frac{\text{ص}\,\text{ر} + \text{ك}\,\text{ك}}{\text{م}\,\text{م}} = \text{ح} \quad \text{حدث}$$

$$\ldots\ldots \frac{\text{ص}}{\text{م}\,\text{م}}\,\text{ء} = \text{ح}\,\text{ر} + \text{ح}\,\text{ر}_1 \frac{\text{ر}_1}{\text{م}}$$

ل ارتباط بين ء ، ص ، ر ، $\frac{\text{ر}_1}{\text{م}}$ تضرب في مبداء الأمر

ة الثانية من المعادلات (١) في $\frac{\text{ص}}{\text{م}}$ فيحصل

$$\text{ء} = \frac{\text{ص}}{\text{م}}\,\text{ك}\,\text{ر} + \frac{\text{ص}}{\text{م}}\,\text{ر}_1\,\text{ر}_1$$ وحيث ان $\frac{\text{ص}}{\text{م}}\,\text{ك}$ ، ر_1

ا القسمة على م فيلزم ان م يقسم ايضاً $\frac{\text{ص}}{\text{م}}\,\text{ك}$

ان م أوّلي مع ر وقد فرض على وجه الاختصار أنّ

$\frac{\text{هـ}}{\text{م}} = \text{ج ن} \frac{\text{هـ ك}}{\text{م ١١}} = \text{ج}$ فيكون

(٥) ..... $\frac{\text{هـ هـ}}{\text{م ١١}} \text{ء} = \text{ج ر} + \text{ج ب} \frac{\text{ك}}{\text{م ١١}}$

ويؤخذ من المعادلتين (٤) و (٥) ان المقادير المفروضة للمتغيرين

س و ص اللذين تؤول بهما الكميات الكثيرة الحدود ر ن $\frac{\text{ك}}{\text{م ١١}}$

الى الصفر يترتب عليهما ايضاً انعدام $\frac{\text{هـ هـ}}{\text{م ١١}} \text{ج ن} \frac{\text{هـ هـ}}{\text{م ١١}} \text{ء}$

وحيث أن $\frac{\text{هـ هـ}}{\text{م ١١}}$ ن $\frac{\text{ك}}{\text{م ١١}}$ أوليان معاً فتكون جميع حلول

المعادلتين ر = ٠ ن $\frac{\text{ك}}{\text{م ١١}}$ = ٠ محققة للمعادلتين

ج = ٠ ن ء = ٠ المفروضتين

ولتحصيل ارتباط بين ج ن ب ن $\frac{\text{ك}}{\text{م}}$ تضرب المعادلة

(٤) في هـ ويستعوض هـ ر بالطرف الثاني من المعادلة الثالثة

من المعادلات (١) فيحدث

$\frac{\text{هـ هـ هـ}}{\text{م ١١}} \text{ج} = \text{ب} \left(\text{ج ك} + \text{ج هـ} \frac{\text{ك}}{\text{م ١١}} \right) + \text{ج ب ر}$

وحيث أن م يقسم بالفرض الطرف الأول من هذه المعادلة

كما انه يقسم ايضاً ب ر فيكون قاسماً للكمية ب (ج ك + ج هـ $\frac{\text{ك}}{\text{م}}$

وحيث أن ب ن م أوليان معاً فيكون م قاسماً للمضروب

فيه ب وحينئذ اذا جعل ج رمز الخارج القسمة حدث

(٦) ..... $\frac{\text{هـ}_{١}\text{هـ}_{٢}\text{هـ}_{٣}}{\text{م}_{١}\text{م}_{٢}\text{م}_{٣}}\text{ج} = \text{ج}_{١}\text{ر} + \text{ج}_{٢}\text{ر}\,\frac{\text{ك}_{٢}}{\text{م}_{٢}}$

فاذا ضربت المعادلة (٥) فى $\text{هـ}_{٢}$ واستعوض $\text{هـ}_{٢}\text{ر}$ بالطرف الثانى من المعادلة الثالثة من المعادلات (١) فانها تؤول الى

$$\frac{\text{هـ}_{١}\text{هـ}_{٢}\text{هـ}_{٣}}{\text{م}_{١}\text{م}_{٣}}\text{ر} = \text{ر}\left(\text{ج}_{١}\text{ج} + \text{ج}_{٢}\text{هـ}_{٢}\frac{\text{ك}_{١}}{\text{م}_{١}}\right) + \text{ج}_{٢}\text{ر}_{٢}\text{ر}$$

وبمثل ما تقدم يبرهن على ان المكرر ر يكون قابلاً للقسمة على $\text{م}_{٢}$ وحينئذٍ اذا جعل $\text{ج}_{٢}$ رمزاً لخارج القسمة حد —

(٧) ..... $\frac{\text{هـ}_{١}\text{هـ}_{٢}\text{هـ}_{٣}}{\text{م}_{١}\text{م}_{٢}\text{م}_{٣}}\text{ر} = \text{ج}_{٢}\text{ر} + \text{ج}_{٢}\text{ر}\,\frac{\text{ك}_{٢}}{\text{م}_{٢}}$

ويؤخذ من المعادلتين (٦) و (٧) ان جميع المقادير المفروضة للمتغيرين س و ص التى تؤول بها الكميتان الكثيرتا الحدود $\text{ر و}\frac{\text{ك}_{٢}}{\text{م}_{٢}}$ الى الصفر يترتب عليها ايضاً انعدام الطرفين الاولين من هاتين المعادلتين وحيث ان $\frac{\text{هـ}_{١}\text{هـ}_{٢}\text{هـ}_{٣}}{\text{م}_{١}\text{م}_{٢}\text{م}_{٣}}$ و $\frac{\text{ك}_{٢}}{\text{م}_{٢}}$ اوليات معاً فتكون جميع حلول المعادلتين $\text{ر} = ٠$ و $\frac{\text{ك}_{٢}}{\text{م}_{٢}} = ٠$ محققة للمعادلتين $\text{ج} = ٠$ و $\text{ر} = ٠$ المفروضتين

فأما المعادلة التى يحدث منها ارتباط بين $\text{ج و ر و}\frac{\text{ك}_{٢}}{\text{م}_{٢}}$ فانها تحصل من ضرب المعادلة (٦) فى $\text{هـ}_{٢}$ واستعواض $\text{هـ}_{٢}\text{ر}$ بالطرف الثانى من المعادلة الرابعة من المعادلات (١) وبهذه

المثابة يكون $\frac{\partial^{٣}\partial^{٢}\partial^{١}}{\partial م_{٣}\partial م_{٢}\partial م_{١}}$ م = ر (ع $\frac{\partial ك}{\partial م_{٣}}$ + $\frac{\partial هـ}{\partial م_{٣}}$ غ $\frac{\partial ك}{\partial م_{٢}}$) + ع $\frac{\partial ك}{\partial م_{١}}$ فاذا قسم طرفا هذه المعادلة على $\partial م_{٣}$ وجعل ع رمزًا لخارج قسمة الكمية الكثيرة للحدود التامة ع $\frac{\partial ك}{\partial م_{٣}}$ + $\frac{\partial هـ}{\partial م_{٣}}$ ع $\frac{\partial ك}{\partial م_{٢}}$ على $\partial م_{٣}$ حدث

(٨) ..... $\frac{\partial^{٣}\partial^{٢}\partial^{١}}{\partial م_{٣}\partial م_{٢}\partial م_{١}}$ م = غ ر + ع $\frac{\partial ك}{\partial م_{٣}}$

ولتحصيل ارتباط بين ر و ر و $\frac{\partial ك}{\partial م_{٣}}$ تضرب المعادلة (٧) في $\partial هـ_{٣}$ ويستعوض $\partial هـ_{٣}$ ر بالطرف الثاني من المعادلة الرابعة من المعادلات (١) فيحدث من ذلك

$\frac{\partial^{٣}\partial^{٢}\partial^{١}}{\partial م_{٣}\partial م_{٢}\partial م_{١}}$ ر = ر (ع $\frac{\partial ك}{\partial م_{٣}}$ + $\frac{\partial هـ}{\partial م_{٣}}$ ع $\frac{\partial ك}{\partial م_{٢}}$) + ع $\frac{\partial ك}{\partial م_{٢}}$

وبقسمة طرفي هذه المعادلة على $\partial م_{٣}$ وجعل ع رمزًا لخارج قسمة الكمية الكثيرة للحدود التامة ع $\frac{\partial ك}{\partial م_{٣}}$ + $\frac{\partial هـ}{\partial م_{٣}}$ ع $\frac{\partial ك}{\partial م_{٢}}$ على $\partial م_{٣}$ يحدث

(٩) ..... $\frac{\partial^{٣}\partial^{٢}\partial^{١}}{\partial م_{٣}\partial م_{٢}\partial م_{١}}$ ر = ع ر + ع $\frac{\partial ك}{\partial م_{٢}}$

ويؤخذ من المعادلتين (٨) و (٩) ان جميع المقادير المفروضة للمتغيرين س و ص التي تؤول بها الكميتان الكثيرتا الحدود ر و $\frac{\partial ك}{\partial م_{٣}}$ الى الصفر يترتب عليها ايضًا انعدام الطرفين الاولين من هاتين المعادلتين وحيث ان $\frac{\partial^{٣}\partial^{٢}\partial^{١}}{\partial م_{٣}\partial م_{٢}\partial م_{١}}$ و $\frac{\partial ك}{\partial م_{٣}}$

اولياً معاً فتكون جميع حلول المعادلتين $ر = ٠$ و $\frac{ك}{م}$ = ٠

محققة للمعادلة الأخرى ضمناً $ح = ٠$ و $ر = ٠$

وحيث انه لم يبق لنا الا ان نبرهن على ان أى مقادير محققة لهم المعادلتين

$ح = ٠$ و $ر = ٠$ تكون جميع المقادير المحققة للمعادلات (١) فنقول

انه يلزم لتكوين المعادلات التى يؤخذ منها هذا الاثبات ان نضع

فى المعادلة (٣) $ح$ بدل $\frac{ك}{م}$ و $ع$ بدل $\frac{ك}{م}$ فيحدث بعد

تحويل $ع ر$ من طرفه الى الطرف الآخر

(١٠) ..... $ح ح - ع ر = ر \frac{ك}{م}$

فاذا اريد الآن حذف $ر$ من المعادلتين (٤) و (٥) فانه يتوصل

الى ذلك بواسطة طرح احدى هاتين المعادلتين من الاخرى بعد

ان تضرب المعادلة الأولى فى $ح$ والثانية فى $ع$ وذلك بملاحظة

مقادير $ح$ و $ع$ وقد تكون العملية مختصرة اذا ضربت المعادلة

(٤) فى $ر$ والمعادلة (٥) فى $ح$ لانه يتحصل حينئذ عند طرح

احدى المعادلتين الناتجتين من الأخرى

$(ع ر - ح ح) ر + (ع ر - ح ح) ر \frac{ك}{م} = ٠$ وبوضع $- ر \frac{ك}{م}$

بدل $ع ر - ح ح$ وحذف المضروب $ر$ يحدث

(١١) ..... $\text{ج}_{١}\,\text{ج} - \text{ج}\,\text{ء}_{١} = -\text{ر}\,\frac{\text{ر}_{١}}{\text{م}_{١}}$

واذا اريد حذف $\text{ر}_{١}$ من المعادلتين (٦) و (٧) تضرب المعادلة (٦) في $\text{ء}_{١}$ والمعادلة (٧) في $\text{ج}_{١}$ ثم تطرح احدى المعادلتين الناتجتين من الاخرى فيحدث

$(\text{ج}\,\text{ء}_{١} - \text{ج}_{١}\,\text{ج})\,\text{ر} + (\text{ج}\,\text{ء}_{١} - \text{ج}_{١}\,\text{ج})\,\text{ر}_{٢}\,\frac{\text{ر}_{٢}}{\text{م}_{٢}} = ٠$ وبوضع $\text{ر} = \frac{\text{ر}_{١}}{\text{م}_{١}}$

بدل $\text{ج}\,\text{ء}_{١} - \text{ج}_{١}\,\text{ج}$ وحذف المضروب ر يحدث

(١٢) ..... $\text{ج}_{٢}\,\text{ج} - \text{ج}\,\text{ء}_{٢} = \text{ر}\,\frac{\text{ر}_{١}\,\text{ر}_{٢}}{\text{م}_{١}\,\text{م}_{٢}}$

وبهذه المثابة تتحصل المعادلة

(١٣) ..... $\text{ج}_{٢}\,\text{ج} - \text{ج}\,\text{ء}_{٢} = -\frac{\text{ر}_{١}\,\text{ر}_{٢}\,\text{ر}_{٣}}{\text{م}_{١}\,\text{م}_{٢}\,\text{م}_{٣}}$

ويؤخذ من المعادلة (١٣) هذه أنّ أيّ مقادير مفروضة للمتغيرين س و ص ومحققة للمعادلتين ج = ٠ و ء = ٠ تكون محققة ايضًا للمعادلة $\frac{\text{ر}_{١}\,\text{ر}_{٢}\,\text{ر}_{٣}}{\text{م}_{١}\,\text{م}_{٢}\,\text{م}_{٣}} = ٠$ وهذا يقتضي أنّ أحد المضاريب $\frac{\text{ر}}{\text{م}}$ و $\frac{\text{ر}_{١}}{\text{م}_{١}}$ و $\frac{\text{ر}_{٢}}{\text{م}_{٢}}$ و $\frac{\text{ر}_{٣}}{\text{م}_{٣}}$ يكون معدومًا

ومن هنا يعلم أنّ مقادير المتغير ص تؤخذ من المعادلات

$\frac{\text{ر}}{\text{م}} = ٠$ و $\frac{\text{ر}_{١}}{\text{م}_{١}} = ٠$ و $\frac{\text{ر}_{٢}}{\text{م}_{٢}} = ٠$ و $\frac{\text{ر}_{٣}}{\text{م}_{٣}} = ٠$

اذا تقرر هذا وفرض أنّ س = ل و ص = ے كناية عن المقادير

المضبوطة

المضبوطة للمعادلتين $ج = ٠$ و $ء = ٠$ يقال

اذا كان المقدار $ص = ے$ جذرًا للمعادلة $\frac{ك}{م} = ٠$ كان المقدار

$س = ل$ و $ص = ے$ محققين للمعادلتين $ج = ٠$ و $\frac{ك}{م} = ٠$

وان كان المقدار $ص = ے$ لا يحقق المعادلة $\frac{ك}{م} = ٠$ وكان

جذرًا للمعادلة $\frac{ك}{م_١} = ٠$ يُعلم من المعادلة (١٠) ان المعادلة

$ر = ٠$ تتحقق بالمقدارين $س = ل$ و $ص = ے$ وبناءً على ذلك

يكون هذان المقداران محققين للمعادلتين $ر = ٠$ و $\frac{ك}{م_١} = ٠$

وان كان المقدار $ص = ے$ لا يحقق واحدة من المعادلتين $\frac{ك}{م} =$

و $\frac{ك}{م_١} = ٠$ وكان جذرًا للمعادلة $\frac{ك}{م_٢} = ٠$ يُعلم من المعادلة

(١١) ان المعادلة $ر = ٠$ تتحقق بالمقدارين $س = ل$ و $ص = ے$

وبناءً على ذلك يكون هذان المقداران محققين للمعادلتين $ر = ٠$ و $\frac{ك}{م_٢}$

وان كان المقدار $ص = ے$ لا يحقق واحدة من المعادلات الثلاث

$\frac{ك}{م} = ٠$ و $\frac{ك}{م_١} = ٠$ و $\frac{ك}{م_٢} = ٠$ وكان جذرًا للمعادلة $\frac{ك}{م_٣} =$

يُعلم من المعادلة (١٢) ان المعادلة $ر = ٠$ تتحقق بالمقدارين

$س = ل$ و $ص = ے$ وبناءً على ذلك يكون هذان المقداران محققين

للمعادلتين $ر = ٠$ و $\frac{ك}{م_٣} = ٠$

وحينئذ تكون جميع المقادير المحققة للمعادلتين ج = ٠ ، ء = ٠ من جملة المقادير المحققة للمعادلات (٢)

ويطلق على المعادلة $\frac{\text{ج}_{١}\text{ء}_{٢}\text{ء}_{١}\text{ج}_{٢}}{\text{ج}_{١}\text{ء}_{٢}\text{ء}_{١}\text{ج}_{٢}}$ = ٠ التي تحصل منها جميع مقادير ص اسم المعادلة الانتهائية بالنسبة الى ص

ولنوضح ذلك بمثالين فنقول

المثال الاول

$\text{س}^{٣} + ٢\text{ص س}^{٢} + (٢\text{ص}^{٢} - \text{ص} + ١)\text{س} + \text{ص}^{٣} - \text{ص}^{٢} + ٢\text{ص} = ٠$ ، و

$\text{س}^{٢} + ٢\text{ص س} + \text{ص}^{٢} - \text{ص} = ٠$

القسمة الاولى

$$\begin{array}{l|l} \text{س}^{٣} + ٢\text{ص س}^{٢} + (٢\text{ص}^{٢} - \text{ص} + ١)\text{س} + \text{ص}^{٣} - \text{ص}^{٢} + ٢\text{ص} & \text{س}^{٢} + ٢\text{ص س} + \text{ص}^{٢} - \text{ص} \\ \hline -\text{س}^{٣} + ٢\text{ص س}^{٢} - (\text{ص}^{٢} - \text{ص})\text{س} & \text{س} + \text{ص} \\ \hline \text{ص س}^{٢} + (٢\text{ص}^{٢} + ١)\text{س} + \text{ص}^{٣} - \text{ص}^{٢} + ٢\text{ص} & \\ -\ \text{ص س}^{٢} - ٢\text{ص}^{٢}\text{س} - \text{ص}^{٢} + \text{ص} & \\ \hline \text{س} + ٢\text{ص} & \end{array}$$

القسمة الثانية

$$\begin{array}{l|l} \text{س}^{٢} + ٢\text{ص س} + \text{ص}^{٢} - \text{ص} & \text{س} + ٢\text{ص} \\ -\text{س}^{٢} - ٢\text{ص س} & \text{س} \\ \hline \text{ص}^{٢} - \text{ص} & \end{array}$$

وحيث

وحيث انه لم يحصل تصليح فى المقاسيم ولم يحذف من البواقى مضروب ما فتحصل جميع حلول المعادلتين المفروضتين بواسطة المعادلتين

س + ٢ ص = ٠ و ش − ص = ٠

اللتين تؤخذ منهما المقادير الأربعة

ص = ٠ و س = ٠ و ص = ١ و س = −٢

وحينئذٍ تكون المعادلة ش − ص = ٠ هى المعادلة الانتهائية بالنسبة الى ص

المثال الثانى

ش + ٢ ص ش + ٢ ص (ص − ٢) س + ش − ٤ = ٠ و

ش + ٢ ص س + ٢ ش − ٥ ص + ٢ = ٠

وأما القسمة الاولى فانه يؤخذ منها الباقى (ص − ٢) س + ش − ٤ أو (ص − ٢)(س + ص + ٢) ثم يحذف المضروب ص − ٢ ويقسم الطرف الاول من المعادلة الثانية على س + ص + ٢ فيكون الباقى وهو ش − ٥ ص + ٦ غير محتو على المتغير س وحينئذٍ تتحصل جميع حلول المعادلات المفروضة بواسطة حل المعادلات

(١) ..... ص − ٢ = ٠ و ش + ٢ ص س + ٢ ش − ٥ ص + ٢ = ٠ و

(٤) ..... ص - ٥ص + ٦ = ٠ و س + ص + ٢ = ٠

فأما المعادلات (١) فتؤخذ منها المقادير ص = ٢ و س = ٠ و

ص = ٢ و س = -٤ وأما المعادلات (٢) فتحصل منها المقادير

ص = ٢ و س = -٤ و ص = ٣ و س = -٥

وأما المعادلة الانتهائية بالنسبة الى ص فانها تحصل من ضرب

طرفي المعادلتين ص - ٢ = ٠ و ص - ٥ص + ٦ = ٠ في بعضها

في المعادلات التفاضلية

بند ٢١١ قد تقدم (في بند ٢٨٦) انه يمكن اجراء عملية استخراج الجذور غير المنطقة لمعادلة رقمية وذلك بان يجرى العمل في مبدأ الأمر على معادلة اخرى تكون جذورها هي الفروق بين جذور المعادلات المفروضة مأخوذة مثنى ولنتصدى الآن لبيان كيفية تكوين هذه المعادلة فنرمز الى المعادلة المفروضة بالرمز

(١) ..... ء (س) = ٠

ونجعل ء و ، ء هـ و ، ء ح رموزاً لجذورها المبهمة فاذا فرض في مبدأ الأمر انه اريد تحصيل معادلة تكون جذورها هي الفروق بين الجذر هـ وجذور اخرى عددها م - ١

لزم ان يجعل س = س − حـ فيكون ص = حـ − حـ

وبوضع حـ + ص بدل س في المعادلة د(س) = ٠ تؤول الى

د(حـ + ص) = ٠

او انه يحصل بمقتضى عملية التحليل (كما في ص ٢٢٥)

(ب) ... د(حـ) + د′(حـ) ص + د″(حـ) $\frac{ص^٢}{١ \times ٢}$ + د‴(حـ) $\frac{ص^٣}{١ \times ٢ \times ٣}$ + ... = ٠

وحيث ان حـ بالفرض جذر للمعادلة (١) فتكون د(حـ) معدومة

وبناء على ذلك تكون المعادلة (ب) قابلة للقسمة على ص ويكون

لها جذر معدوم وهذا الجذر المعدوم حادث عن التفاضل

حـ − حـ لانه بمقتضى الارتباط ص = س − حـ يشاهد ان مقادير

ص هي الفروق بين الجذر حـ وسائر جذور المعادلة (١)

بما فيها من الجذر حـ وبحذف هذا الجذر المعدوم تؤول المعادلة الى

د′(حـ) + د″(حـ) $\frac{ص}{١ \times ٢}$ + د‴(حـ) $\frac{ص^٢}{١ \times ٢ \times ٣}$ + ... = ٠

وحينئذ تكون جذور هذه المعادلة هي الفروق بين الجذر حـ والجذ

م − ١ للمعادلة المفروضة

فاذا وضع في المعادلة المذكورة ز بدل حـ تحصلت من ذلك

معادلة تكون جذورها هي جميع الفروق بين الجذر ز وجذو

م-١ للمعادلة المفروضة واذا وضع فيها هـ بدل ز حدثت من ذلك معادلة تكون جذورها هي جميع الفروق بين الجذر هـ والجذور م-١ للمعادلة المفروضة وهلم جرا

ومن هنا يؤخذ ان جذور المعادلة المفروضة الموفقة مثنى هي مقادير ص الحادثة من وضع كل من هذه الجذور بدل س في المعادلة

(٣) ز'(س) + ز''(س) $\frac{ص}{١×٢}$ + ز'''(س) $\frac{ص^٢}{١×٢×٣}$ + الخ = ٠

وهذا راجع الى حل كلتا المعادلتين (١) و (٢)

وبناء على ذلك اذا حذف س من المعادلتين (١) و (٢) كانت المعادلة الانتهائية بالنسبة الى ص هي المعادلة المطلوبة عند وحيث ان المعادلة المفروضة بدرجة م فتكون المعادلة التفاضلية بدرجة م (م-١) لان عدد جذورها يساوي عددا التراتيب التي يمكن تكوينها من الحروف ص ز ن هـ المأخوذة مثنى مثنى وعددها م

والمعادلة التفاضلية لا تحتوي الا على قوى زوجية للمجهول لانها تحتوي في آن واحد بكل من الجذرين ص - ز و ز - ص

وبناء على ذلك يكون كل اثنين من جذورها متساويين متحدي الفين في العلامة

فاذا فرض أن م (م-١) = ٢ن وكانت المعادلة التفاضلية موضوعة بالصورة

$$\text{ص}^{\text{ن}} + \text{أ}_1 \text{ص}^{\text{ن}-1} + \text{أ}_2 \text{ص}^{\text{ن}-2} + \dots\dots + \text{أ}_{\text{ن}} = 0$$

امكن جعل ص = ع وحينئذ يحدث

$$\text{ع}^{\text{ن}} + \text{أ}_1 \text{ع}^{\text{ن}-1} + \text{أ}_2 \text{ع}^{\text{ن}-2} + \dots\dots + \text{أ}_{\text{ن}} = 0$$

وحيث ان جذور هذه المعادلة هي مربعات فروق جذور المعادلة المفروضة فيطلق عليها بهذا السبب اسم معادلة مربعات التفاضل

سند ٢١٣ وتستعمل المعادلة التفاضلية (كما في سند ٢٨٥) في تحصيل كمية دون اصغر فرق بين جذور معادلة مفروضة ولذا يبحث عن النهاية الصغرى للجذور الموجبة للمعادلة التفاضلية وهذه النهاية هي الكمية المطلوبة

ويمكن ايضا ان يبحث عن النهاية الصغرى لجذور معادلة مربعات التفاضلات فيكون الجذر الذي يسمى لهذه النهاية هو الكمية الصغيرة المطلوبة وبهذه المثابة تتحصل غالبا النهاية الكبرى

نحو شرعي غير هاف العمل

فاذا تحصلت من حذف س من المعادلتين (١) و(٢) عدة معادلات جزئية محتوية على ص وكانت جذور كل واحدة من هذه المعادلات من مقادير ص فانه يحدث من ذلك كمية تكون اقل من أصغر فرق بين جذور المعادلة المفروضة وذلك بعد البحث عن النهايات الصغرى بين جذور كل معادلة جزئية وحيث انه لابد من اقتران كل فرق في كلتا المعادلتين بالعلامتين + و − فلا مانع من ان تكون النهاية الصغرى للمقادير الموجبة المفروضة للتغير س او النهاية الصغرى للمقادير السالبة هي الكمية الصغيرة المطلوبة

واذا لم تجر العمليات الضرورية لجعل المعادلات المحتوية على ص غير مشتملة على جذور اخرى فانه يمكن دائماً استعمال هذه المعادلات في تعيين الكمية المطلوبة غير انه يقتضي البحث عن نهاية تكون أصغر من النهاية التي يمكن تحصيلها عندما تكون المعادلات المحتوية على ص غير مشتملة على جذور اخرى

مثال ٢١٤ ومعادلة مربعات التفاضلات يعلم منها هل المعادلة المذكورة جذور تخيلية أم لا

ان كانت [illegible] معادلة مربعات التفاضلات
جذور حقيقية موجبة و[illegible] تكون تامة وغير محتوية على
مساويات (ويفرض ان المعادلة المفروضة لا تكون لها جذور
متساوية حتى لا يكون للمعادلة التفاضلية جذور معدومة)
واذا كانت معادلة مربعات التفاضلات تامة وكانت محتوية
على مغايرات فقط كانت جذور المعادلة المفروضة كلها حقيقية
لانه اذا كان لها جذران تخيليان كالجذرين $\text{ن} + \text{ت}\,\text{م}$ و
$\text{ن} - \text{ت}\,\text{م}$ كان مربع تفاضل هذين المقدارين -4م^2 وحينئذ
يؤخذ من ذلك ان معادلة مربعات التفاضلات يكون لها جذر
سالب وحيث انها تامة فتكون محتوية على مساوية وهذا مخالف
للفرض فاذا اجريت الطريقة المتقدمة (في بند ٢١١) على المعادلة
العمومية ذات الدرجة الثالثة

$$\text{ك}\,\text{س}^3 + \text{ح}\,\text{س} + \text{ل} = 0$$

نوجد ان معادلة مربعات التفاضلات هي

$$\text{ح}^3 + 36\,\text{ح}\,\text{ل} + 9\,\text{ح}^2\,\text{ك} + 4\,\text{ح}^3 + 27\,\text{ك}^2\,\text{ل} = 0$$

ومن هنا يؤخذ ان الشرطين الضروريين الكافيين لجعل جذور

المعادلة المعروضة حقيقية هما ح < ٠ ، ٤ ح^٣ + ٧ ، ك^٣ < ٠ وهذا موافق لما ذكر (في بند ٤٨٨)

الباب الثاني عشر

في القواسم ذات الدرجة الثانية وتنقيص درجة المعادلات والمعادلات العكسية والمعادلات ذات الحدين والمعادلات ذات الحدود الثلاثة والمعادلات المحتوية على المجهول تحت علامة الجذر

في القواسم ذات الدرجة الثانية

بند ٤٨٥ لتفرض المعادلة

$$س^{م} + ج س^{م-١} + ء س^{م-٢} + هـ س^{م-٣} + \dots\dots\dots = ٠$$

فاذا اريد تحصيل القواسم ذات الدرجة الثانية للطرف الاول من هذه المعادلة فانه يرمز لواحد من هذه القواسم بالكمية ذات الحدود الثلاثة

$$س^{٢} + ح س + ك$$

لانه اذا اجريت عملية قسمة الطرف الأول من المعادلة على $س^{٢} + ح س + ك$ تحصل من ذلك باقٍ بدرجة اولى محتوٍ على س وهذا الباقي يرمز له بالكمية $ع س + ك$ (بجعل ع ، ك كمية

عن الكميتين المشتملتين على المكررين المجهولين ج، ك ويلزم لكي تكون الكمية ذات الحدود الثلاثة س + ج س + ك من قواسم الطرف الاول من المعادلة المفروضة ان يكون الباقي ج س + ك معدوماً وحيث أن س غير معين فيكون ج = ٠ ، ك = ٠ وحينئذ تعلم من المقادير المحصلة لكل من ج، ك بواسطة هاتين المعادلتين جميع القواسم ذات الدرجة الثانية للمعادلة المفروضة

وحيث ان عدد القواسم ذات الدرجة الثانية ½ م (م-١) (كما في بند ٢٤٢) فاذا حذف ج أو ك من المعادلتين ج = ٠ ، ك = ٠ كانت المعادلة الانتهائية من المعادلات ذات الدرجة ½ م (م-١) وحيث ان هذا العدد اكبر من م فإن زاد م ٣ كان تعيين القواسم ذات الدرجة الثانية اصعب من المعادلة المفروضة

بند ٢١٦ ويمكن استعمال البحث عن القواسم ذات الدرجة الثانية في تعيين الجذور التخيلية لاي معادلة ولذا يكفي ان يعين كل من المقدارين الحقيقيين لكل من ج و ك المحققين للمعادلتين ج = ٠ ، ك = ٠ فنتحصل من ذلك جميع القواسم الحقيقية

ذات الدرجة الثانية للمعادلة المفروضة وبجعل كل من هذه المقاسم مساويًا للصفر تتعين الجذور التخيلية لهذه المعادلة فان وجد لكل من ع و ك مقدار انمنطقان محققان للمعادلتين ع = ٠ و ك = ٠ سهل تعيينها ومن هنا نعلم جميع المقاسم المنطقة ذات الدرجة الثانية للمعادلة المفروضة وحينئذٍ يؤول حل هذه المعادلة الى حل معادلة دونها فى الدرجة والى حل جملة معادلات بدرجة ثانية

سند ٢١٧ ولنمثل للطريقة المذكورة بأمثلة فنفرض فى مبداء الأمر المعادلة

(١) ..... س^٤ + حس + د = ٠

التى اذا قسم طرفيها الأول على س + ع س + ك تحصل من ذلك الباقى (ع^٢ - ك + ح) س + ع ك + د

وحينئذٍ يلزم وضع المعادلتين

ع^٢ - ك + ح = ٠ و ع ك + د = ٠

اللتين اذا حذف منهما ك حدثت هذه المعادلة

(٢) ..... ع^٤ + حع + د = ٠

وحيث ان هذه المعادلة لا تختلف عن المعادلة (١) الا بكونه قد وضع فيها

فيها ح بدل ج فتكون مقادير [illegible] جذور المعادلة المفروضة

ولمزيد ايضاح ذلك نجعل [illegible] ن = ، لا رموزاً لجذور المعادلة

(١) فتكون القواسم المطلوبة هي

(س − ل)(س − ے) ن (س − ل)(س − لا) ن (س − ے)(س − لا)

وحينئذ تكون مقادير ج هي

− (ل + ے) ن − (ل + لا) ن − (ے + لا)

وحيث أن المعادلة المفروضة مجردة عن الحد الثاني فيكون

ل + ے + لا = ٠

ومن هنا ينتج

− (ل + ے) = لا ن − (ل + لا) = ے ن − (ے + لا) = ل

بند ٢١٨ ثم نفرض ايضاً المعادلة

(٢) ..... ش^٤ + ح ش^٢ + ء س + ه = ٠

التي اذا قسم طرفها الأول على ش^٢ + ج س + ك تحصل الباقي

(ء − ح ج + ج^٣ ك − ج^٤) س + ه − ح ج + ك^٢ − ج^٢ ك

وحينئذ يلزم وضع المعادلتين

(٤) ج^٣ − ٢ ج ك + ح ج − ء = ٠ ، ن (٥) ك^٢ − (ح + ج^٢) ك + ه = ٠

اللتين يتحصل من احداهما

(٦) ..... $ء = \frac{ع^٣ + حع - د}{ع^٢}$

وبوضع هذا المقدار فى المعادلة الاخرى يحدث

(٧) ..... $ع^٦ + ٢حع^٤ + (ح^٢ - ٤هـ) ع^٢ - د^٢ = ٠$

وهذه المعادلة بدرجة سادسة لكن حيث انها لاتحتوى الا على قوى زوجية للمجهول ع فتؤول الى معادلة بدرجة ثالثة بفرض $ع^٢ = ز$

ويسهل ادراك هذا التحويل لان مقادير ع الستة يتكون من مجموع كل اثنين منها أربعة جذور للمعادلة المفروضة وحيث أن مجموع هذه الجذور معدوم فيكون مجموع كل اثنين منها مساويًا لمجموع الاثنين الآخرين ومتخالفًا معه فى العلامة وحينئذ لاتكون المعادلة التى يتعين بها ع مشتملة الا على قوى زوجية للمجهول

فاذا اجريت مثل هذه العملية على المعادلة التامة

$ش + حش^٤ + ءش + هـ س + و = ٠$

فانه يتحصل من ذلك لتعيين ع معادلة بدرجة سادسة تكون تامة ايضًا لكنه يبرهن بالسهولة على انه اذا حذف الحد

الثانى

[illegible] الخاصة بمجهول

في (كما في [illegible]) [illegible] المجهول

ولذا اذا رمز الى الجذور الأربعة للمعادلة [illegible] بالرموز

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ويلزم لحذف الحد الثالث من المعادلة [illegible] تامين

ان تعتبر ان الجميع جذور هذه المعادلة [illegible] مجموع هذه

الجذور [illegible] بعد [illegible] عن [illegible] ومقدار [illegible]

وحيث ان هذه الكمية هي [illegible] اضيفت

الى كل من المقادير [illegible] شوهد ان [illegible]

الحادثة من هي الجذور [illegible]

$\frac{\text{سند}}{٢١٩}$ وحيث ان الحد الاخير من المعادلة (١) سالب يكون نوعه

المعادلة جذران حقيقيان احدهما موجب والآخر سالب [illegible]

وحينئذ يتحصل بالنسبة لكل مقدار حقيقي مفروض للمجهول ك

مقدار حقيقي للمجهول ك وبناء على ذلك تحقق هذه النظرية وهي ان

أى معادلة حقيقية المكررات تكون مشتملة دائماً على مضاريب حقيقية بدرجة ثانية فى المعادلة ذات الدرجة الرابعة وذلك بقطع النظر عن النظريات العمومية التى سبق اثباتها فى هذا الموضوع

فاذا كان ء = ٠ آلت المعادلة (٤) الى

$$ع^2 - ٢ع ك + هـ ع = ٠$$

وحينئذ تتحقق كلتا المعادلتين (٤) و (٥) إما بوضع

$$ع = ٠ \quad و \quad ك^2 - (هـ + ع^2) ك + هـ = ٠$$

أو بوضع

$$ع^2 - ٢ك + هـ = ٠ \quad و \quad ك^2 - (هـ + ع^2) ك + هـ = ٠$$

فأما المعادلتان الأوليان فيؤخذ منهما أن

$$ك = \frac{1}{2} هـ \pm \sqrt{\frac{1}{4} هـ^2 - هـ}$$

وأما المعادلتان الأخريان فيؤخذ من احداهما

$$ك = \frac{هـ + ع^2}{2}$$

وبوضع هذا المقدار فى المعادلة الاخرى يحدث

$$ع^4 + ٢هـ ع^2 + هـ^2 - ٤هـ = ٠$$

فاذا كان $هـ^2 - ٤هـ > ٠$ تعين بالقانون $ك = \frac{1}{2} هـ \pm \sqrt{\frac{1}{4} هـ^2 - هـ}$

مقداران

[illegible]

اذا كان [illegible]

[illegible]

ويحصل بالنسبة لكل [illegible] حقيقي

للمجهول ك

في الحل العددي للمعادلات [illegible]

بند ٣٢٠ أي معادلة بدرجة ثانية وبمجهول واحد تحتوي زيادة

عن القوة الثالثة للمجهول على قوى دونها وعلى حد غير مشتمل على

المجهول لكن حيث [illegible] انه يمكن

دائماً [illegible] لا تكون [illegible]

على قوة للمجهول الذي يكون دون المعادلة في الدرجة مباشرة غير

ان هذا التحويل [illegible] مقامات [illegible] داخلة

في المعادلة ذات الدرجة الثالثة توضع بالصورة

(١) س^٣ + ٣ح س + ٢ ك = ٠

غير انه يفرض أن ح و ك كانا حقيقيان فان

س = ص + ن

امكن وضع المعادلة الناتجة بالصورة

$$ص^3 + ز^3 + 3 (ص ز + ج)(ص + ز) + 2 ك = 0$$

وهذه المعادلة تتحقق بوضع

$$ص ز + ج = 0 \text{ و } ص^3 + ز^3 + 2 ك = 0$$

وهاتان المعادلتان تؤخذ منهما

$$ص^3 ز^3 = - ج^3 \text{ و } ص^3 + ز^3 = - 2 ك$$

ومن هاتين المعادلتين ينتج أن $ص^3$ و $ز^3$ يكونان جذرين للمعادلة $ط^2 + 2 ك ط - ج^3 = 0$

وحينئذ يحصل

$$ص^3 = - ك + \sqrt{ك^2 + ج^3} \text{ و } ز^3 = - ك - \sqrt{ك^2 + ج^3}$$

وحيث أن $س = ص + ز$ فيكون قانون مقادير س مبيناً بالصورة

$$(2) \ldots\ldots \quad س = \sqrt[3]{- ك + \sqrt{ك^2 + ج^3}} + \sqrt[3]{- ك - \sqrt{ك^2 + ج^3}}$$

فاذا قطع النظر عن المقادير الجبرية الموجودة تحت العلامات الجذرية فانه لا يحصل من المعادلة (2) الا مقدار واحد للمتغير س الا انه لما كان للجذر التكعيبي ثلاثة مقادير تحصل

للمتغير س من مجموع الجذرين مقادير متنوعة وهذه
المقادير ليست كلها محققة للمعادلة المفروضة لانه يلزم أن
مقادير ص و ز تكون محققة للمعادلتين ص ز = -ج
و ص + ز = -ك وحيث ان الاولى من هاتين المعادلتين
قد استعوضت بالمعادلة ص ز^٣ = -ج^٣ وكان لكل كمية ثلاثة
جذور تكعيبية فيكون للمعادلة ص ز^٣ = -ج^٣ بالنسبة لحاصل
الضرب ص ز ثلاثة مقادير متنوعة وحينئذ اذا رمز
لجذري الواحد التكعيبيين التخيليين بالرمزين ل و ل^٢ (كما
سيأتي في بند ٢٤٢) كانت مقادير ص ز الثلاثة المتطابقة
مع ص ز^٣ = -ج^٣ هي ص ز = -ج و ص ز = -ج ل
و ص ز = -ج ل^٢

وبناء على ذلك تؤخذ من المعادلة (٢) جذور كل من المعادلة
(١) والمعادلتين الحادثتين من وضع ج ل أو ج ل^٢ بدل ج
وحيث أن ج كمية حقيقية فيلزم ان يعطي النظر في القانون
(٢) عن جميع نواتج مقادير الجذر التكعيبي التي يكون حاصل ضربها
تخيليا

فاذا كانت الكمية ك + خ موجبة كان لكل جذر تكعيبي مقدار حقيقي ولنرمز على وجه الاختصار للمقدار الحقيقي المفروض للجذر التكعيبي الأول بالرمز ج ولمقدار الثاني بالرمز ء فتكون المقادير الثلاثة للجذر الأول هي ج و ل ج و ل² ج والمقادير الثلاثة للجذر الثاني هي ء و ل ء و ل² ء وحينئذ اذا ضربت بطريق التوالي الكميات الثلاث الأول في الكميات الثلاث الأخر ولوحظ اولا ان ل و ل² مقداران تخيليان وثانيا ان ل³ = ١ و ل² تخيلي لانه لما كان ل³ = ١ كان ل² = ل شوهد انه لا يتحصل غير ثلاثة حواصل حقيقية هي ج × ء و ل ج × ل² ء و ل² ج × ل ء ومن هنا يؤخذ انه لا يكون للمتغير س الا المقادير الثلاثة هذه

ج + ء و ل ج + ل ء و ل² ج + ل² ء

فأما المقدار الأول فهو حقيقي وأما المقداران الآخران فهما تخيليان وقد تقدم أن المعادلة لا يزيد عدد جذورها عن درجتها ولنمثل لذلك بالمعادلة

س³ − ٦ س − ٩ = ٠

وحيث ان

وحيث أن $\text{أ} = \text{ب} = \text{ج} = -\frac{\text{ك}}{٣}$ فيكون $\sqrt{\text{ك}^٢ + ٣\text{ع}} = \frac{٧}{٣}$

ومن هنا يجد أن

$$\text{ج} = \sqrt[٣]{-\text{ك} + \sqrt{\text{ك}^٢ + ٣\text{ع}}} = \sqrt[٣]{\frac{١٨}{٣}} = \text{ب}$$

$$\text{أ} = \sqrt[٣]{-\text{ك} - \sqrt{\text{ك}^٢ + ٣\text{ع}}} = \sqrt[٣]{\frac{٣}{٣}} = ١$$

وحينئذ تكون الجذور الثلاثة هي

$$\text{س} = ٢\text{ب}$$

$$\text{س} = -١ + \sqrt{٣}\sqrt{-١} + \frac{١}{٢}\left(-١ - \sqrt{٣}\sqrt{-١}\right) = \frac{١}{٢}\left(-٢ + \sqrt{٣}\sqrt{-١}\right)$$

$$\text{س} = -١ - \sqrt{٣}\sqrt{-١} + \frac{١}{٢}\left(-١ + \sqrt{٣}\sqrt{-١}\right) = \frac{١}{٢}\left(-٢ - \sqrt{٣}\sqrt{-١}\right)$$

ولا شك أن مقادير المتغير س الثلاثة هذه تحقق بها المعادلة المفروضة وان كانت الكمية ع سالبة كانت الكمية $\text{ك}^٢ + \text{ع}^٣$ سالبة وحينئذ تكون الجذور التكعيبية الداخلة في المعادلة (٤) غير محتوية على مقدار حقيقي لكنه لا يلزم ان يؤخذ من ذلك انه لا يكون للمعادلة المفروضة الا جذور تخيلية لانه قد تقدم ان الجذور تكون في هذه الحالة كلها حقيقية وينبغي لتخليص هذه الجذور من المعادلة (٤) ان نجرد هذه المعادلة عن الجذور التخيلية وذلك لا يتأتى الا اذا تعين كل جذر تكعيبي بجملة عدد جذورها

غير محدود وهذا هو المعروف بالحالة غير المنطقة للمعادلة ذات الدرجة الثالثة

ولنمثل لهذه الحالة بالمعادلة

$$س^٣ - ١٥ س + ٤٠ = ٠$$

التي يتحصل منها عند جعل $ع = -٧$ و $ك = ١٠$ في المعادلة (٢)

$$س = \sqrt[٣]{-١٠ + \sqrt{٩ - ١٠}} + \sqrt[٣]{-١٠ - \sqrt{٩ - ١٠}}$$

وبناء على ذلك يتحقق بالسهولة ان المعادلة المفروضة لها ثلاثة جذور حقيقية لانها تحقق اذا وضع فيها بدل المتغير س كل من الاعداد ٥ و ٤ و ٥ −

وان كانت الكمية $ك^٢ + ع^٣$ موجبة كان القانون (٢) غير كاف أيضًا لانه ربما تحصل منه للجذر الحقيقي مقدار محتو على علامات جذرية مع أن الجذر يكون منطقًا

ولنمثل لذلك بالمعادلة

$$س^٣ - ٦ س - ٤ = ٠$$

التي يتحصل منها عند جعل $ع = -٢$ و $ك = -٤$ في القانون

$$س = \sqrt[٣]{٤ + \sqrt{٢٧ - ١٤}} + \sqrt[٣]{٤ - \sqrt{٢٧ - ١٤}}$$

وحينئذ

وحينئذ يكون الجذر الحقيقي مبيناً بصورة غير منطقة مع انه منطق لان المعادلة المفروضة تتحقق بفرض س = ٤

ولكي يستنتج من القانون (٢) المقدار المضبوط للجذر عندما يكون منطقاً يلزم ان يجرى على كل من الجذور التكعيبية الداخلة في المعادلة عملية تحويل مشابهة للعملية التي اجريت على المقدار $\sqrt{ح + \sqrt{ء}}$ وهذا التحويل له ارتباط بالبحث عن الجذر المنطق لمعادلة بدرجة ثالثة

فاذا كان ك + غ = ٠ كانت كل واحدة من الكميتين المبينتين بالرمزين ج و ء مساوية للمقدار الحقيقي المفروض للجذر $\sqrt[٣]{ك}$

وحيث أن ل + ل' = -١ فيكون

$ج + ء = ٢\sqrt[٣]{ك}$ و $ج ل + ء ل' = -\sqrt[٣]{ك}$ و $ج ل' + ء ل = -\sqrt[٣]{ك}$

وحينئذ تكون الجذور الثلاثة للمعادلة حقيقية ويكون اثنان منها متساويين

في الحل العمومي للمعادلة ذات الدرجة الرابعة

بند ٣٤٠ الاعمال التي سبقت (في بند ٣١٨) توصل الى الحل العمومي لمعادلة ذات الدرجة الرابعة

ولنا اذا فرضت المعادلة

(١) ..... $\text{س}^{٤}$ + ح $\text{س}^{٣}$ + د س + هـ = ٠

وجعل $\text{ع}^{٢}$ = ز في المعادلة (٧) المتقدمة (في ص ٢١٨) آلت هذه المعادلة ذات الدرجة الرابعة الى

(٢) ..... $\text{ز}^{٤}$ + ٢ ج $\text{ز}^{٢}$ + (ح − ٤ هـ) ز − $\text{د}^{٢}$ = ٠

وحيث ان هذه المعادلة بدرجة ثالثة فيمكن تحصيل المقادير العمومية لجذورها بالمثابة المتقدمة (في ص ٢١٨) لانه اذا رمز الى هذه الجذور بالرموز ٤ ز و ٤ $\text{ز}''$ و ٤ $\text{ز}'''$ كانت مقادير ع هي ± ٢ $\sqrt{\text{ز}}$ و ± ٢ $\sqrt{\text{ز}''}$ و ± ٢ $\sqrt{\text{ز}'''}$ لكنه يمكن ان تكون مقادير ع هذه مبينة بالجذور الأربعة للمعادلة (١) لانه اذا رمز الى هذه الجذور بالرموز ل و ے و لا و ط . ولوحظ ان مجموعها معدوم كانت مقادير ع الستة هي

± (ل + ے) و ± (ل + لا) و ± (ل + ط)

وحينئذ يكون

ل + ے = ± ٢ $\sqrt{\text{ز}}$ و ل + لا = ± ٢ $\sqrt{\text{ز}''}$ و ل + ط = ± $\sqrt{\text{ز}'''}$

ومن هنا يوجد بملاحظة القانون ل + ے + لا + ط = ٠ أن

(٣) ..... ل = ± $\sqrt{\text{ز}}$ ± $\sqrt{\text{ز}''}$ ± $\sqrt{\text{ز}'''}$

وحيث

وحيث أن ح كناية عن واحد من الجذور الأربعة للمعادلة (١) فتؤخذ هذه الجذور الأربعة من المعادلة (٣) ولما كانت المعادلة (٢) لا تحتوى الا على مربع ء لم تتغير اذا أخذت المعادلة

ش + ح ش − ء س + هـ = ٠ بدل المعادلة (١) وحينئذ تؤخذ ايضاً الجذور الأربعة لهذه المعادلة من المعادلة (٣) لانه يشاهد بالنسبة الى العلامتين ± الموضوعتين امام كل علامة جذرية ان مقدار ل يتعين بثمانية أوجه ويلزم لاستخراج جذور المعادلة ش + ح ش − ء س + هـ = ٠

ان ينبه على انه اذا ضربت الكميات الثلاث ل + ى ، ل + لا ، ل + ط في بعضها تحصل من ذلك حاصل ضرب يكون مركباً من مجموع حواصل ضرب الجذور ل ، ى ، لا ، ط ثلاث مضافاً اليه الكمية ل² + ل² ى + ل² لا + ل² ط وحيث أن هذه الكمية معدومة لكونها تؤول الى ل² (ل + ى + لا + ط) فيؤخذ من ذلك ان الحاصل (ل + ى) (ل + لا) (ل + ط) يساوى مجموع حواصل ضرب الجذور ل ، ى ، لا ، ط ثلاث وحيث أن هذا المجموع يساوى − ء فلا يدخل في المعادلة (٣) غير توافيق

علامات العلامات الجذرية المحققة لهذا الشرط وهو ان حاصل ضرب هذه العلامات الجذرية يكون متحداً في العلامة مع ء

فاذا فرض ان طرق تعيين الجذور الثلاثة المبينة بالمقادير $+\sqrt{ز'}$ و $+\sqrt{ز''}$ و $+\sqrt{ز'''}$ مكيفة الوضع بحيث يكون حاصل ضربها متحداً في العلامة مع ء فتكون الجذور الأربعة للمعادلة المفروضة مبينة هكذا

$$(٤)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} +\sqrt{ز'}+\sqrt{ز''}-\sqrt{ز'''} \\ +\sqrt{ز'}-\sqrt{ز''}+\sqrt{ز'''} \\ -\sqrt{ز'}+\sqrt{ز''}+\sqrt{ز'''} \\ -\sqrt{ز'}-\sqrt{ز''}-\sqrt{ز'''} \end{array}\right.$$

ويستند وبناء على ذلك يكون واحد من جذور المعادلة (٤) موجباً لان حدها الاخير سالب ويكون جذراها الآخران متحدين في العلامة لان حاصل ضرب الجذور الثلاثة موجب ويمكن ان يكون هذان الجذران تخيليين

ويؤخذ من المعادلة (٣) انه اذا كانت الجذور الثلاثة للمعادلة (٤) موجبة كانت جميع جذور المعادلة (١) حقيقية ولا يمكن

ان

ان تكون جميع جذور المعادلة (١) هذه حقيقية ما لم تكن الجذور الثلاثة للمعادلة (٢) موجبة لان جذور المعادلة (٤) هذه كناية عن مربعات حواصل جمع كل اثنين من جذور المعادلة (١) وحينئذ اذا كانت جميع جذور المعادلة (١) حقيقية كانت حواصل جمع كل اثنين من هذه الجذور حقيقية ايضاً وبناء على ذلك تكون مربعات حواصل الجمع هذه موجبة

فاذا كانت الجذور ز′ و ز″ و ز‴ موجبة كان حاصل الضرب (+ √ز′)(+ √ز″)(+ √ز‴) موجباً وحينئذ لا تكون المقادير (٤) موافقة الا في الحالة التي يكون فيها ء موجباً فقط اما اذا كان ء سالباً فانه يلزم في هذه المقادير تغيير اشارة واحدة من العلامات الجذرية

واذا فرض الآن ان الجذرين ز″ و ز‴ موجبان فانه يمكن في هذه الحالة وضع ء √−١ و ك √−١ بدل علامتي الجذر + √ز″ و + √ز‴ وحينئذ ء و ك هنا كناية عن كميتين موجبتين فيؤول حاصل الضرب (+ √ز′)(+ √ز″)(+ √ز‴) الى

− ء ك √ز′

ولكي يكون هذا الحاصل متحدًا في العلامة مع ء يلزم أن يتعين + √ز على وجه بحيث يكون متخالفًا في العلامة مع ء وبهذه المثابة تكون الجذور الأربعة مبينة هكذا

+ √ز + (ر − ك) √−١

+ √ز − (ر − ك) √−١

− √ز + (ر + ك) √−١

− √ز − (ر + ك) √−١

وهذه الجذور الاربعة تكون تخيلية ما لم تكن ر = ك لان المقدارين الاولين يؤولان حينئذ الى الكمية الحقيقية √ز

واذا فرض أن الجذرين ز″ و ز‴ تخيليان كان

ز″ = ر + ك √−١ و ز‴ = ر − ك √−١

وبناء على ذلك يمكن وضع مقداري √ز″ هكذا ± (م + ٢ √−١) ومقداري √ز‴ هكذا ± (م − ٢ √−١) (كما سيأتي في بند ٢٤٤)

وإذا أخذ بدل + √ز″ و + √ز‴ المقداران

م + ٢ √−١ و م − ٢ √−١ حدث (+ √ز″)(+ √ز‴) = م² + ٤

وحينئذ يلزم لكي يكون حاصل الضرب (+ √ز)(+ √ز″)(+ √ز‴) متحدًا

متحدًا في الصورة مع $\sqrt{\text{ز}}$ على وجه بحيث يكون
متحدًا في الصورة مع $\sqrt{\text{ز}}$ وبهذه المثابة تكون الجذور الأربعة
مبينة هكذا

$$-\sqrt{\text{ز}}+\sqrt{\text{م}+\text{ن}}\ ،\ -\sqrt{\text{ز}}-\sqrt{\text{م}-\text{ن}}\ ،\ +\sqrt{\text{ز}}+\sqrt{\text{م}+\text{ن}}\ ،\ +\sqrt{\text{ز}}-\sqrt{\text{م}-\text{ن}}$$

وأما الجذران الأولان فهما حقيقيان وأما الجذران الاخران فهما
تخيليان

ومما ينبغي التنبيه عليه ان المعادلة (ن) هي المعروفة بآلة المعادلة (١)

في تنقيص درجة المعادلات

بند ٣٢٣ قد شوهد فيما تقدم ان اي معادلة محتوية على جذور
متساوية تنقسم الى عدة معادلات اخرى دونها في الدرجة
ولذا يقال ان هذه المعادلة تكون قابلة لتنقيص درجتها
ويمكن ايضًا تنقيص درجة المعادلة متى علم ان بعض جذورها
تتحقق به شروط مخصوصة

بند ٣٢٤ فاذا فرض انه يوجد بين جـ و د اللذين هما من جذور
المعادلة و(س) = ٠ ارتباط مبين بالمعادلة

(١) ..... جـ + ك د = ر

نبيّن الحيث أن ه ، و من جذور المعادلة ء(س) = ٠ فيحدث
ء(ه) = ٠ ، ء(و) = ٠ . واذا وضع في المعادلة ء(و) = ٠
مقدار و المستخرج من المعادلة (١) آلت الى ء(ك − ج ه / ك) = ٠
وحينئذ تكون الكمية ه محققة لمعادلتين ء(س) = ٠ ، ء(ك − ج س / ك) =
معًا وبناء على ذلك يوجد للطرفين الأولين من هاتين المعادلتين
قاسم مشترك اذا جعل مساويًا للصفر تعين الجذر ه .
فاذا جعل ء رمزًا للقاسم المشترك الأعظم بين الكميتين
الكثيرتي الحدود ء(س) ، ء(ك − ج س / ك) وفرض أن ه
احد من مقادير س به تتحقق المعادلة ء = ٠ كان هذا
مقدارًا مشتركًا للمعادلتين ء(س) = ٠ ، ء(ك − ج س / ك) =
معًا وحيث أن ء(ك − ج ه / ك) معدوم فيكون ك − ج ه / ك جذرًا
للمعادلة ء(س) = ٠ . وحينئذ اذا جعل و رمزًا لهذا الجذر
كانت الكميتان ه ، و كافية من جذري المعادلة ء(س) =
المختلفين للارتباط ج ه + ك و = ر
فاذا وجد معادلة ء(س) = ٠ جذر كالجذر ه بحيث يكون
ك − ج ه / ك = ه أي ج ه − ك ه = ر

اخذ

أخذ هذا الجذر ايضاً من المعادلة ء = ٠ أعني انه يلزم في هذه الحالة ان يوضع هـ في الارتباط (١) فيكون الجذر الثاني هو الكمية هـ بعينها لكنه لا ينبغي ان يستنبط من ذلك ان الجذر هـ يدخل في المعادلة ء(س) = ٠ مرتين لانه يكفي أن يكون هذا الجذر داخلاً في هذه المعادلة مرة واحدة ليكون محققاً لكل من المعادلتين ء(ك − جـ س / ك) = ٠ و ء = ٠

ويشاهد بالسهولة انه اذا دخل جذر عدة مرات في المعادلة ء(س) = ٠ دخل ايضاً في المعادلة ء = ٠ بقدر ما دخل في المعادلة المذكورة لان جذور المعادلة ء(ك − جـ س / ك) = ٠ هي مقادير س الحادثة من جعل ك − جـ س / ك مساوياً بالتوالي لكل من جذور المعادلة ء(س) = ٠ وحينئذ تكون الجذور المشتركة بين المعادلتين ء(ك − جـ س / ك) = ٠ و ء(س) = ٠ أي جذور المعادلة ء = ٠ هي جذور المعادلة ء(س) = ٠ التي يكون المقدار ك − جـ س / ك مساوياً لكل واحد منها

بند ٣٢٥ ومتى كانت جـ = ك آل الارتباط (١) الى حـ + و = ف وللاختصار يوضع ك / جـ = ف وحيث أن الجذرين جـ و ء

داخلاً بمثابة واحدة فى الارتباط المفروض فيتعين كلاهما بالمعادلة ء = ٠ وحينئذ يلزم ان يكون هذان الجذران معلومين من هذه المعادلة التى تتعين بها زيادة على ذلك للمعادلة المفروضة جميع الجذور المحققة للارتباط

س + س = ف الذى يؤخذ منه ان س = ½ ف

فاذا كانت المعادلة ء (س) = ٠ مشتملة على جذور كل منها يساوى ½ ف وأخرى يتكون من كل اثنين منها مجموع يساوى ف فان المعادلة المحولة ء (س − س) = ٠ الحادثة من المعادلة ء (س) = ٠ بواسطة الارتباط ح + و = ف تكون مساوية للمعادلة المفروضة وبناء على ذلك لا يمكن هنا استعمال الطريقة السابقة

وفى هذه الحالة اذا حذفت فى مبدأ الأمر الجذور التى كل واحد منها يساوى ½ ف أمكن تحليل المعادلة الناتجة الى مضاريب بدرجة ثانية توضع بالصورة ش − س ف + ز

ن ز هو عبارة عن حاصل ضرب الجذرين ح ن و اللذين يتحصل بالنسبة لهما ح + و = ف فاذا قسم الطرف الأول من المعادلة

المفروضة

المفروضة على ش - س ف - ز تحصل من ذلك باق بدرجة
اولى هو ح س + ك وحيث أن ح و ك كيتان كبيرتا
الحدود لا تشتملان الا على المجهول ز فلكي تكون القسمة
بلا باق يلزم ان يكون ح = ٠ و ك = ٠ وحينئذ يكون للكميتين
ح و ك قاسم مشترك اذ لجعل مساويًا للصفر تعينت به مقادير
ز ثم انه يتكون من المعادلة ش - س ف + ز = ٠ مقادير
للمتغير س يكون كل واحد منها مطابقًا لمقدار من مقادير ز
ويمكن ايضًا استعمال هذه الطريقة في حالة ما اذا كانت
بعض جذور المعادلة المفروضة محققة للارتباط ح + و = ف
سند ٢٤٦ ولنفرض الآن أن الجذور الثلاثة ح و و و هـ من
المعادلة ر (س) = ٠ تحقق الارتباط ح ح + ك و + ر هـ
= ف (و ح و ك و ر كميات معلومة) فيلزم ان يضاف
الى هذا الارتباط المعادلات ر (ح) = ٠ و ر (و) = ٠ و ر (هـ) = ٠
فاذا حذف و و هـ من المعادلتين الاخيرتين ومن الارتباط
ح ح + ك و + ر هـ = ف تحصلت من ذلك معادلة تكون
مشتملة على ح وتكون محققة هي والمعادلة ر (ح) = ٠

وحينئذ يكون لهاتين المعادلتين قاسم مشترك اذا جعل مساويًا للصفر تعيّن به الجذر ح فان كانت ع = ك تعين بالقاسم المشترك الجذران ح و ح اعنى انه يكون بدرجة ثانية وان كانت ع = ك = ر كان هذا القاسم المشترك بدرجة ثالثة

بند ٢٤٧ وماذكر فى شأن الارتباطات المبينة بمعادلات من المعادلات ذات الدرجة الاولى يستعمل فى الارتباطات من حيث هى والصعوبات التى توجد فى مسائل هذا النوع لاتترتب الا على الحذف المطلوب عمله

وقد قال المهندس لاكروا ان تنقيص درجة المعادلات لايتأتى الا اذا شوهد بين مجاهيل مسئلة ممكنة أن عدد المعادلات يزيد عن عدد المجاهيل و هذا يتحصل غالبًا اذا لوحظت المسئلة المفروضة بأوجه متنوعة لانه يوجد حينئذ بالنسبة لمجهول واحد معادلتان انتهائيتان باتحادهما مع بعضهما يكون لهما قاسم مشترك منه يؤخذ ابسط حل للمسئلة

بند ٢٤٨ ويلزم فى بعض الأحيان تعيين الارتباطات الواقعة بين المكررات غير المعينة لمعادلة حتى تكون لهذه المعادلة

جذور

بذو [illegible] وطا [illegible] لذا [illegible] طريقة شابهة
لطريقة المتقدمة [illegible] من الارتباطات الواقعة
بين [illegible] وصورة [illegible] ضروب [illegible] ثم يتم طرفيا الأول
الى هذا المضروب [illegible] بلا [illegible] اذا كانت
كل واحد من [illegible] القوى المتنوعة للمتغير س مساويًا
للصفر في الباقي والكمية غير المحتوية على س وبهذه المثابة
تقصر معادلات شرطية تكون بينة للارتباطات الواقعة
بين مكيات [illegible] المعادلة المفروضة فان كانت هذه المعادلات
محتوية زيادة [illegible] لك على كميات اختيارية اقتضى دخولها
فيه لاجل تكوين [illegible] المضروب الداخل في المعادلة المفروضة
فانه يلزم حذف [illegible] الكميات غير [illegible] حتى يوصل الى
الارتباطات [illegible]

ولنفرض الآن معادلة محتوية على مكرر [illegible] غير معينة يدخل فيها
الجذر الواحد ثلاث مرات فاذا رمزنا الى هذا الجذر بالرمز ج
كانت المعادلة المفروضة مشتملة على المضروب (س - ج)^٣
أي س^٣ - ٣ ج س^٢ + ٣ ج^٢ س - ج^٣ وحينئذ يقسم الطرف الأول

س المعادلة على $\text{ش} - \text{ح}$ وتتوالى عملية
القسمة الى ان يتوصل الى باق به درجة ثانية بالنسبة للتغير س
وهذا الباقي يوضع بالصورة $\text{ج ش} + \text{ك س} + \text{ف}$ (بجعل ج
ك ف رموزاً لكميات محتوية على مكررات المعادلة المفروضة
والكمية الاختيارية ح) وحينئذ توضع الكميات الثلاث هكذا
$\text{ج} = ٠$ ، $\text{ك} = ٠$ ، $\text{ف} = ٠$ فاذا حذف ج من هذه المعادلات
الثلاث تحصلت من ذلك معادلتان شرطيتان دالتان على
الارتباطات المطلوبة الواقعة بين المكررات غير المعينة للمعادلة
المفروضة

فاذا فرض الآن انه يراد تعيين الارتباطات الواقعة بين مكررات
المعادلة

$$\text{ش}^{٤} + \text{ج ش}^{٣} + \text{ك ش} + \text{ق س} + \text{ل} = ٠$$

بشرط ان يكون لها جذران متساويان ومتخالفان في العلامة
فان هذه المعادلة تكون محتوية على مضروب بوضع بالصورة
$\text{ش} - \text{ح}$ وحينئذ اذا قسم الطرف الأول على $\text{ش} - \text{ح}$ تحصل
من ذلك باق به درجة اولى هو

$(\text{ح ج} + \text{ق})$

(ح ع + ق) س + ح + ض ح − ل

ويلزم لكي تكون القسمة صحيحة بدون ق ان يكون

ح ع + ق = ٠ ، ن ح + ك ح + ل = ٠

وبحذف ح من هاتين المعادلتين يشاهد أن الارتباط المطلوب يكون مبينا بالصورة

ق − ع ك ق + ع ل = ٠

في المعادلات العكسية

يطلق على المعادلة اسم المعادلة العكسية اذا كانت لا تتغير عند ما يوضع فيها $\frac{1}{س}$ بدل س

مثلا لتفرض المعادلة الزوجية الدرجة

س + ع س + ك س + ق س + ل س + ط س + ع = ٠

فاذا وضع في هذه المعادلة $\frac{1}{س}$ بدل س وضربت جميع حدودها في س وقسمت على ع آلت الى

س + $\frac{ط}{ع}$ س + $\frac{ل}{ع}$ س + $\frac{ق}{ع}$ س + $\frac{ك}{ع}$ س + $\frac{ع}{ع}$ س + $\frac{ع}{ع}$

ولكي لا تكون هذه المعادلة مختلفة عن المعادلة المفروضة يلزم ان يكون

$\frac{١}{ع} = ع \text{ و } \frac{ع}{ع} = ط \text{ و } \frac{ك}{ع} = ل \text{ و } \frac{ق}{ع} = ق \text{ و } \frac{ل}{ع} = ك \text{ و }$

$\frac{ط}{ع} = ع$

وحينئذ يؤخذ من الارتباط $\frac{١}{ع} = ع$ أن $ع^{٢} = ١$ ومن هنا ينتج أن $ع = \pm ١$ فاذا فرض أن $ع = +١$ فان باقي الارتباطات تكون مبينة هكذا

$ع = ط \text{ و } ك = ل \text{ و } ق = ق$

واذا فرض أن $ع = -١$ فان باقي الارتباطات تكون مبينة هكذا

$ع = -ط \text{ و } ك = -ل \text{ و } ق = -ق$ أعني $ق = ٠$

وحينئذ يلزم لكي تكون معادلة زوجية الدرجة عكسية عندما يكون حدها الوسط موجوداً أن تكون مكررات باقي الحدود التي على ابعاد متساوية من النهايتين متساوية فان كان حدها الوسط معدوماً فإما ان تكون مكررات الحدود التي على ابعاد متساوية من النهايتين متساوية واما ان تكون لها مقادير رقمية متساوية ومتخالفة في العلامة وهذان الشرطان كافيان لتحقيق المعادلة المفروضة

واذا اجريت على المعادلة ذات الدرجة الفردية عملية مشابهة للعملية التي اجريت على المعادلة العمومية ذات الدرجة السادسة

علم

علم انه يلزم لكى تكون أى معادلة فردية الدرجة عكسية أن مكررات الحدود التى على ابعاد متساوية من النهايتين تكون متساوية أو انها تكون متحدة فى المقدار الرقمى ومتخالفة فى العلامة

بند ٢٣٠ ويؤخذ من تعريف المعادلات العكسية انه اذا تحققت معادلة مشابهة للمعادلة المفروضة بالجذور ه ، ه ، ه ، ... تحققت ايضا بالجذور $\frac{1}{ه}$ ، $\frac{1}{ه}$ ، $\frac{1}{ه}$ ... وبناء على ذلك اذا كان جـ مختلفا عن $\frac{1}{جـ}$ كان ء مختلفا عن $\frac{1}{ء}$ ، هـ مختلفا عن $\frac{1}{هـ}$ ... وكانت المعادلة زوجية الدرجة وزيادة على ذلك يكون الحد الأخير المساوى لحاصل ضرب الجذور مبينا بالمقدار

واذا فرض ان $ح = \frac{1}{ح}$ كان $ح^2 = 1$ ومن هنا يكون

$ح = \pm 1$

اذا تقرر هذا وكان حاصل ضرب جذور معادلة مساويا للحد الأخير مأخوذا بعلامته ان كانت المعادلة زوجية الدرجة وبعلامة مخالفة لعلامته ان كانت فردية الدرجة نتج مما تقدم ان اى معادلة عكسية من المعادلات الفردية الدرجة التى يكون حدها الأخير مبينا بالمقدار +1 يكون لها جذر يساوى

وان اى معادلة عكسية من المعادلات الفردية الدرجة التى يكون حدها الأخير بيناً بالمقدار −١ يكون لها جذر يساوى +١ وان اى معادلة عكسية من المعادلات الزوجية الدرجة التى يكون حدها الأخير بيناً بالمقدار −١ يكون لها جذر يساوى −١ وجذر يساوى +١ وحينئذ اذا حذف من هذه المعادلات الجذران +١ و −١ تحولت الى معادلات اخرى عكسية من المعادلات الزوجية الدرجة التى تكون فيها مكررات الحدود الموضوعة على ابعاد متساوية من النهايتين متساوية ومتحدة فى العلامة

ويتوصل الى مثل هذه النواتج بمجرد النظر الى المعادلة

(١) .... $س^{٧} + ع س^{٦} + ك س^{٥} + ق س^{٤} + ق س^{٣} + ك س^{٢} + ع س + ١ = ٠$

التى يمكن وضعها بالصورة

$س^{٧} + ١ + ع س (س^{٥} + ١) + ك س (س^{٣} + ١) + ق س^{٣} (س + ١) = ٠$

ومن هنا يؤخذ ان الطرف الأول من هذه المعادلة يحتوى على المضروب س + ١ الذى ينتج منه الجذر −١ فاذا اجريت عملية قسمة كل من الكميات ذات الحدين $س^{٧} + ١$ و $س^{٥} + ١$ و الخ على المضروب

س + ١

س = ١ فحصلنا من ذلك المعادلة

س − ١	س^٥ − ١	س^٤ − ١	س^٣ − ١	س^٢ − ١	س + ١ = ٠
+ ح	− ح	+ ح	− ح	+ ح	
	+ ك	− ك	+ ك		
		+ ق			

فاذا فرضنا ايضاً المعادلة

(٤) ..... س^٧ + ح س^٦ + ك س^٥ + ق س^٤ − ق س^٣ − ك س^٢ − ح س − ١ = ٠

التي يمكن وضعها بالصورة

س^٧ − ١ + ح س (س^٥ − ١) + ك س^٢ (س^٣ − ١) + ق س^٣ (س − ١) = ٠

لنظر هذا من ذلك ان الطرف الأول من هذه المعادلة يحتوى على المضروب س − ١ الذي يؤخذ منه الجذر س = ١ فاذا اجرينا عملية قسمة كل من الحدات ذات الحدين س^٧ − ١ و س^٥ − ١ و س^٣ − ١ على المضروب س − ١ فحصلت من ذلك المعادلة

س^٦ + ١	س^٥ + ١	س^٤ + ١	س^٣ + ١	س^٢ + ١	س + ١ = ٠
+ ح	+ ح	+ ح	+ ح	+ ح	
	+ ك	+ ك	+ ك	+ ك	
			+ ق		

واذا فرضت المعادلة

$$\text{ش} - \text{ح}\,\text{ش}^{2} + \text{ج}\,\text{ش} - \text{ح}\,\text{س} - 1 = 0$$

التي يمكن وضعها بالصورة

$$\text{ش} - 1 + \text{ح}\,\text{س}\,(\text{ش} - 1) + \text{ج}\,\text{ش}\,(\text{ش} - 1) = 0$$

نشوهد من ذلك ان الطرف الأول من المعادلة يحتوى على المضروب ش − ١ الذى يؤخذ منه الجذران س = +١ و س = −١ فاذا اجريت عملية قسمة كل من الحيات ذات الحدين ش − ١ و ش − ١ و ش − ١ على المضروب ش − ١ تحصلت من ذلك المعادلة

$$\text{ش} + \text{ح}\,\text{ش} + 1 + \text{ج}\,\text{ش} + \text{ح}\,\text{س} + 1 = 0$$

بند ٢٢١ ولنتصدى الآن لبيان الكيفية التي بها يمكن تحويل حل معادلة عكسية زوجية الدرجة مكرراتها التي على ابعاد متساوية من النهايتين متساوية ومتحدة فى العلامة الى حل معادلة على النصف منها فى الدرجة فنقول

حيث ان جذور المعادلة تنقسم الى جملتين بحيث اذا كان واحد من جذور احدى هاتين الجملتين مبينا بالرمز س كان الجذر المقابل له من الجملة الاخرى مبينا بالرمز $\frac{1}{\text{س}}$ والمجموع $\text{س} + \frac{1}{\text{س}}$ باقيا

باقيًا على حاله عندما توضع الكمية $\frac{1}{س}$ بدل س أو س بدل $\frac{1}{س}$

فيؤخذ من ذلك انه اذا جعل

(٤) ..... $س + \frac{1}{س} = ز$

كانت مقادير المجهول ز داخلة فى معادلة هى فى الدرجة على النصف من

المعادلة المفروضة .

فاذا فرضت المعادلة العمومية ذات الدرجة السادسة

(٥) .... $س^6 + ج س^5 + جـ س^4 + د س^3 + هـ س^2 + و س + ا = 0$

لزم لتحصيل المعادلة التى تحصل منها مقادير المجهول ز ان يحذف

المجهول س من هذه المعادلة والمعادلة (٤) وذلك بأن تقسم

جميع حدود المعادلة (٥) على $س^3$ فتتحول الى الصورة

(٦) .. .... $س^3 + \frac{1}{س^3} + ج (س^2 + \frac{1}{س^2}) + جـ (س + \frac{1}{س}) + د = 0$

وبرفع طرفى المعادلة (٤) الى الدرجة الثانية يحدث

$س^2 + \frac{1}{س^2} = ز^2 - 2$

فاذا ضربت هذه المعادلة فى المعادلة (٤) حدث

$س^3 + \frac{1}{س^3} = س^3 - 2 ز - (س + \frac{1}{س}) = ز^3 - 3 ز$

واذا وضعت فى المعادلة (٦) المقادير $س + \frac{1}{س}$ و $س^2 + \frac{1}{س^2}$ و $س^3 + \frac{1}{س^3}$

تحصلت من ذلك معادلة بدرجة ثالثة مشتملة على المجهول ز
ومتى تحصلت جذور هذه المعادلة تعينت مقادير س بواسطة
المعادلة (٤) بعد تحويلها الى المعادلة

س - ز س + ١ = ٠ . التي يؤخذ منها أن س = ½ ز ± √(¼ ز² - ١)
وكل مقدار مفروض للمتغير ز يؤخذ منه مقداران للمتغير س
يكون حاصل ضربهما مساويًا للواحد

ويمكن لبيان الكميات ذات الحدين س + ١/س و ش + ١/ش و ص + ١/ص
بالنسبة للكمية ز مع ملاحظة الارتباط س + ١/س = ز أن يستعمل
القانون العمومي الذي يتوصل اليه بواسطة ضرب ش + ١/ش في س
+ ١/س على موجب قواعد الضرب فيحدث

$$(ش + \frac{1}{ش})(س + \frac{1}{س}) = ش^{1+2} + \frac{1}{س^{1+2}} + ش^{1-2} + \frac{1}{س^{1-2}}$$

ومن هنا يؤخذ أن

$$(٧) \ldots ش^{1+2} + \frac{1}{س^{1-2}} = (ش^{2} + \frac{1}{ش^{2}})(س + \frac{1}{س}) - (ش^{1-2} + \frac{1}{س^{1-2}})$$

وحينئذ تنتج مقادير الكميات ذات الحدين ش + ١/ش و ش² +
١/ش² و الخ من القانون (٧) وذلك بان يجعل فيه على التوالي
د = ١ ان د = ٢ و د = ٣ و الخ ويوضع في كل مرة من ذلك ز

بدل

س + $\frac{١}{س}$ وبهذه الصورة يستدل على انه يتحصل للكمية ذات الحدين $س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}$ معتمدا يكون درجته ٢ بالنسبة الى ز

$\frac{٢٤}{٢٣}$ ولنمثل لذلك بالمعادلة

$$٤س^{٥} - ٢٤س^{٤} + ٥٧س^{٣} - ٧٣س^{٢} + ٥٧س - ٢٤س + ٤ = ٠$$

وبقسمة هذه المعادلة على $س^{٢}$ وجمع الحدود المتماثلة الوضع يحدث

$$٤(س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}) - ٢٤(س + \frac{١}{س}) + ٥٧(س + \frac{١}{س}) - ٧٣ = ٠$$

وبفرض س + $\frac{١}{س}$ = ز يحدث

$$س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}} = ز^{٢} - ٢ \text{ و } س^{٣} + \frac{١}{س^{٣}} = ز^{٣} - ٣ز$$

وحينئذ تؤول المعادلة السابقة الى

$$٤ز^{٣} - ٢٤ز^{٢} + ٤٥ز - ٢٥ = ٠$$

وحيث ان هذه المعادلة تتحقق بالجذر +١ فبحذف المضروب ز − ١ تتحصل من ذلك معادلة ذات درجة ثانية كل من جذريها يساوى $\frac{٥}{٢}$

فاذا جعل ز = $\frac{٥}{٢}$ حدث س + $\frac{١}{س}$ = $\frac{٥}{٢}$ ويجعل ز = ١ يحدث

$$س = \frac{١}{٢}(١ \pm \sqrt{-٣})$$

وعلى ذلك يكون للمعادلة المفروضة جذران متساويان كلاهما يساوى ، وآخران كلاهما يساوى $\frac{١}{٢}$ وجذران تخيليان هما $\frac{١}{٢}$ (١ ± $\sqrt{-٣}$)

$\frac{\text{سند}}{٢٢٢}$ ويمكن استعمال طريقة الحذف المتقدمة فى ($\frac{\text{سند}}{٢٢١}$) بالطريقة العمومية المقررة فى الباب الحادى عشر فتؤول المعادلة (٤) كما ذكر الى

ش − ز س + ١ = ٠

فاذا كانت المعادلة المفروضة لا تختلف عن المعادلة المذكورة فى المثال السابق فانه يحصل بعد جعل م س + ج رمز البلق قسمة الطرف الأول من هذه المعادلة على ش − ز س + ١

م = ٤ ز^{٣} − ٤ ز^{٢} + ١٤ ز^{٢} − ز − ٤٥ ز + ٥ ، ف

ج = −١٤ ز^{٢} + ٤ ز^{٢} − ٤٥ ز^{٢} + ٥ ز

ومن هنا يشاهد ان الكميتين الكبرى فى الحدود م و ج لهما قاسم مشترك هو

١٤ ز^{٢} − ٤ ز^{٢} + ٤٥ ز − ٥

وحينئذ يحصل من قسمة م س + ج على هذا القاسم الخارج

(ز − ١)

(ز٢-١) س - ز ويلزم لنتيجة عملية الحذف وتتم بعد لكمية
ش - زس + ١ على (ز٢-١) س - ز [illegible] نقسمة الى
باقهوا الواحد وبناء على ذلك تحصل جميع الحلول مشتركة بين المعادلة
المفروضة ش - زس + ١ = ٠ بأن توضع على التوالي في [illegible] حادة
جميع مقادير ز المستخرجة من المعادلة ٤ ز٢ - ٤ ز + [illegible] = ٠
التي هي عين المعادلة المحصلة آنفاً

ويمكن التنبيه ايضاً على ان الكمية ذات الحدود الثلاثة ش - زس + ١
لما كانت هي المقدار العمومي لقاسم بدرجة ثانية من قواسم المعادلة
المفروضة وكانت مطابقة لجذرين حاصل ضربهما ١ والواحد
تحصلت من ذلك المعادلة التي تستخرج منها مقادير ز وذلك
بفرض ان الطرف الأول من المعادلة المفروضة يكون [illegible] تسر
على ش - س ز + ١ وهذا التنبيه يوصل الى عمليات لا تختلف
عن العمليات السابقة وبناء على ذلك يلزم توالي عملية قسمة الطرف
الأول من المعادلة المفروضة على ش - زس + ١ الى ان يحصل
باق بدرجة اولى كالباقي م س + ق
ومن هنا تحصل المعادلتان م = ٠ ، ق = ٠ وحيث أن [illegible]

المعادلتين متحققتان بمقادير ز فيلزم ان يبحث عن القاسم المشترك الأعظم بين الكميتين الكبيرتين الحدودان ح ويجعل مساويا للصفر فتحصل من ذلك المعادلة المشتملة على المجهول ز

في تحويل المقادير التخييلية ذات الدرجة الثانية

الى الصورة ل + ى √-١ وقياسها وجمعها وطرحها وضربها وقسمتها وهي على هذه الصورة

بند ٣٢٤ هذا وان كان تعيين الجذر التربيعي لكمية سالبة يدل على عملية مستحيلة الا ان علماء الجبر يفرضون ان الجذور التخيلية كميات ويستعملونها بكثرة في الحسابات بواسطة بعض توافيق

مثلا اذا جعل ى رمز الكمية حقيقية كانت جذور الكمية السالبة - ى مبينة في العادة بالصورة ± √-ى وحيث انه يمكن اعتبار الكمية السالبة كحاصل ضرب ى × -١ فان فرض ان الجذور التربيعية لهذا الحاصل متحصلة كما في الحالة التي تكون فيها المضاريب موجبة من ضرب الجذور التربيعية لهذه المضاريب في بعضها فان الجذور التربيعية للكمية - ى تكون مبينة بالصورة ± ى √-١ وحينئذ يكون المقداران ± √-ى ، ± ى √-١ متكافئين

وبناء

وبناء على ذلك لا تغير في الأعمال علامة جذر تخيلية غير العلامة $\sqrt{-1}$

فاذا فرضت الآن المعادلة التامة ذات الدرجة الثانية

$$\text{ش} - \text{ع س} + \text{ك} = ٠$$

شوهد انه اذا كان $\text{ك} > \frac{١}{٤}\text{ع}^{٢}$ كانت جذور هذه المعادلة تخيلية ولتجنب الكسور يوضع ل بدل $\frac{١}{٢}$ ع ولبيان أن ك اكبر من $\frac{١}{٤}$ ع يفرض أن $\text{ك} = \text{ل}^{٢} + \text{ء}^{٢}$ فتؤول المعادلة المفروضة الى

$$\text{ش} - ٢\text{ل س} + \text{ل}^{٢} + \text{ء}^{٢} = ٠$$

وجذور هذه المعادلة تعلم من القانون

$$\text{س} = \text{ل} \pm \sqrt{-\text{ء}^{٢}}$$

الذي يكتب بمقتضى ما ذكر هكذا

$$\text{س} = \text{ل} \pm \text{ء}\sqrt{-١}$$

ويطلق على اسم المقدار التخيلي على كل كمية لا يمكن بيانها بأي مقدار حقيقي موجب أو سالب غير أن الكميتين التخيليتين الموضوعتين بالصورة $\text{ل} + \text{ء}\sqrt{-١}$ أو $\text{ل} - \text{ء}\sqrt{-١}$ هما اللتان تستعملان دون غيرهما في الحسابات الجبرية ولذا اذا اطلق اسم الكمية التخيلية لا يفهم

فى العادة الا الى الكمية الموضوعة بهذه الصورة

فاذا انعدمت فى المقدار ل + ء √-١ الكمية ء التى هى مكرر √-١ آل الحد ء √-١ الى الصفر وبهذا يؤول المقدار المذكور الى الكمية الحقيقية ل وحينئذ تعتبر المقادير الحقيقية كحالة خصوصية من المقادير التخيلية ومن البديهى انه يلزم لكى تكون المعادلة التخيلية متساوية ان تكون فى هذه المقادير الكميات الحقيقية متساوية وبناء على ذلك فأى معادلة طرفاها كميتان تخيليتان تكون كناية عن حاصل جمع معادلتين اطرافهما هى الكميات الحقيقية الداخلة فى هذه المعادلة مثلاً المعادلة

ل - ء √-١ = لا + ط √-١

كناية عن المعادلتين الحقيقيتين

ل = لا و ء = ط

ويقال للمقدارين التخيليين مقترنان اذا كانا لا يختلفان عن بعضهما الا بعلامة مكرر √-١ وذلك كالمقدارين

ل + ء √-١ و ل - ء √-١

بند ٢٢٥ والمقادير التخيلية تطبق عليها القواعد الحسابية غير انه

يلاحظ ان مربع $\sqrt{-1}$ هو -1 ولنوضح ذلك بمثال مشتمل على كمية جمع مقدارين تخيليين وطرحهما وضربهما هو

$$(\text{ل} + \text{ء}\sqrt{-1}) + (\text{ك} + \text{ط}\sqrt{-1}) = \text{ل} + \text{ك} + (\text{ء} + \text{ط})\sqrt{-1} \text{ و}$$

$$(\text{ل} + \text{ء}\sqrt{-1}) - (\text{ك} + \text{ط}\sqrt{-1}) = \text{ل} - \text{ك} + (\text{ء} - \text{ط})\sqrt{-1} \text{ و}$$

$$(\text{ل} + \text{ء}\sqrt{-1})(\text{ك} + \text{ط}\sqrt{-1}) = \text{ل}\,\text{ك} - \text{ء}\,\text{ط} + (\text{ل}\,\text{ط} + \text{ك}\,\text{ء})\sqrt{-1}$$

فاذا اجريت عملية الجمع على المقدارين المقترنين

$$\text{ل} + \text{ء}\sqrt{-1} \text{ و } \text{ل} - \text{ء}\sqrt{-1}$$

تحصلت من ذلك الكمية الحقيقية ٢ل واذا ضربا في بعضهما كان حاصل ضربهما كمية حقيقية هي $\text{ل}^2 + \text{ء}^2$

ويطلق على المقدار المطلق للجذر التربيعي للكمية $\text{ل}^2 + \text{ء}^2$ اسم قياس كل من المقدارين $\text{ل} + \text{ء}\sqrt{-1}$ و $\text{ل} - \text{ء}\sqrt{-1}$ ومن هنا يؤخذ ان قياس اي كمية حقيقية هو المقدار المطلق لهذه الكمية

ولكي يكون القياس $\sqrt{\text{ل}^2 + \text{ء}^2}$ معدوماً يلزم ان يكون $\text{ل} = \text{و} \cdot \text{ء} = \text{و} \cdot$ ليؤول المقدار $\text{ل} + \text{ء}\sqrt{-1}$ في هذه الحالة الى الصفر ويلزم من بعكس ذلك لكي يكون المقدار $\text{ل} + \text{ء}\sqrt{-1}$ معدوماً ان يكون قياسه مساوياً للصفر لان هذا يستلزم جعل $\text{ل} = \text{و} \cdot \text{ء} = \text{و} \cdot$ ليكون

$\sqrt{\text{ل}^2 + \text{ح}^2} =$

ومن البديهي انه يترتب دائماً عوض ب في المقدارين التخيليين ت و ث

قياسهما وعكس ذلك لا يجوز

بند ٢٢٦ قياس المقدار التخيلي المتحصل من ضرب المقدارين ل + ح $\sqrt{-1}$

و لا + ط $\sqrt{-1}$ في بعضهما هو

$$\sqrt{[(\text{ل لا} - \text{ح ط})^2 + (\text{ل ط} + \text{ح لا})^2]}$$

وحينئذ يحصل بواسطة القواعد الحسابية

$$(\text{ل لا} - \text{ح ط})^2 + (\text{ل ط} + \text{ح لا})^2 = (\text{ل}^2 + \text{ح}^2)(\text{لا}^2 + \text{ط}^2)$$

وبناء على ذلك يكون القياس المذكور مساوياً $\sqrt{(\text{ل}^2 + \text{ح}^2)(\text{لا}^2 + \text{ط}^2)}$ أو

$\sqrt{\text{ل}^2 + \text{ح}^2} \times \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ط}^2}$

ومن هنا يؤخذ ان قياس حاصل ضرب مضروبين تخيليين يكون

مساوياً لحاصل ضرب قياسي هذين المضروبين وحينئذ يكون

قياس حاصل ضرب أي جملة من المضاريب التخيلية مساوياً لحاصل

ضرب أقيسة هذه المضاريب

ويلزم لكي يكون اي حاصل ضرب مركب من عدة مضاريب تخيلية

معدوماً ان يكون قياس هذا الحاصل معدوماً (كما في بند ٢٢٥)

وحيث ان هذا القياس كناية عن حاصل ضرب اقيسة للمضاريب التخيلية التي هي كميات حقيقية موجبة فلا يكون معدوماً الا اذا كان قياس واحد من هذه المضاريب مساوياً للصفر وهذا لا يتأتى الا اذا كان واحد من المضاريب المذكورة معدوماً وحينئذٍ يلزم لكي يكون اي حاصل ضرب مركب من مقادير تخيلية معدوماً أن يكون واحد من هذه المضاريب مساوياً للصفر

بند ٣٢٧ اذا اجريت عملية الضرب بطريق التوالي على الكمية $\sqrt{-1}$ حصلت من ذلك في مبداء الأمر لهذه الكمية القوى المتنوعة

$$(\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1} \text{ و } (\sqrt{-1})^2 = -1 \text{ و}$$

$$(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1} \text{ و } (\sqrt{-1})^4 = +1$$

وحيث أن القوة الرابعة للكمية جذر $\sqrt{-1}$ هي ١ فإذا تكونت القوى التي تزيد عن هذه المرة تحصلت من تلك المقادير الأربعة

$$\sqrt{-1} \text{ و } -1 \text{ و } -\sqrt{-1} \text{ و } +1$$

ويمكن بيان جميع قوى الكمية $\sqrt{-1}$ بواسطة اربعة قوانين وبالاختصار انه اذا جعل ن رمزاً لعدد صحيح كانت جميع الاعداد الصحيحة محصورة في القوانين الأربعة $4ن$ و $4ن+1$ و $4ن+2$ و $4ن+3$

وحينئذٍ يؤخذ مما تقدم $(\sqrt{-1})^{٢٤+٢} = -١ \text{ ه } (\sqrt{-1})^{٢٤+٣} = -\sqrt{-1}$ (٥٩٠)

$(\sqrt{-1})^{٢٤} = ١ \text{ ه } (\sqrt{-1})^{٢٤+١} = +\sqrt{-1}$

شيد ٢٣٨ فاذا قسمت الكمية التخيلية $ل + ى \sqrt{-1}$ على الكمية الحقيقية $لا$ وفرض ان خارج القسمة $ع + ك \sqrt{-1}$ لزم ان يحصل

$$لا(ع + ك\sqrt{-1}) = ل + ى\sqrt{-1}$$

او $$ع لا + ك لا \sqrt{-1} = ل + ى \sqrt{-1}$$

وينتج من هذه المتساوية الأخيرة ان $ع لا = ل$ ه $ك لا = ى$ يؤخذ أن $ع = \frac{ل}{لا}$ ه $ك = \frac{ى}{لا}$ وحينئذٍ يكون خارج القسمة $\frac{ل}{لا} + \frac{ى}{لا}\sqrt{-1}$

واذا قسمت الكمية التخيلية $ل + ى \sqrt{-1}$ على $لا + ط \sqrt{-1}$ وكان خارج القسمة يساوى $ع + ك \sqrt{-1}$ تحصل

$(ع + ك\sqrt{-1})(لا + ط\sqrt{-1}) = ل + ى\sqrt{-1}$ أو

$ع لا - ك ط + (ع ط + ك لا)\sqrt{-1} = ل + ى\sqrt{-1}$

وهذه المعادلة تنقسم الى معادلتين اخريين هما

$ع لا - ك ط = ل$ ه $ع ط + ك لا = ى$

ومنهما يؤخذ أن

$ع =$

[illegible]

[illegible] خارج قسمة [illegible]

[illegible] فى لا − ط √−١ فيحصل

[illegible] = (ل + ى √−١)(لا − ى √−١) / (لا + ط √−١)(لا − ط √−١) = [illegible]

= (لا + ى ط) / (لا² + ط²) + (ى لا − ل ط) / (لا² + ط²) √−١

ويؤخذ من القاعدة المتقدمة (ل ينبغى) أن قياس خارج قسمة الكميتين المتخيلتين على بعضهما هو خارج قسمة [illegible] تحقق ذلك بمقتضى هذه القاعدة

— فى الجذر التربيعى للمقدار س + ص √−١ [illegible] و [illegible]

تتعلق بالمقادير الجبرية للجذور مهما كانت درجتها

ينبغى ٣٢٩ بمقتضى ما تقدم (فى ينبغى) من الجزء الأول) يحصل

(١) √(ح + √ى) = √((ح + √(ح² − ى))/٢) + √((ح − √(ح² − ى))/٢) و

(٢) $\sqrt{\text{ح} - \sqrt{\text{د}}} = \sqrt{\frac{\text{ح} + \sqrt{\text{ح}^2 - \text{د}}}{2}} - \sqrt{\frac{\text{ح} - \sqrt{\text{ح}^2 - \text{د}}}{2}}$

ويمكن بواسطة هذين القانونين تحصيل الجذرين التربيعيين للمقدارين التخيليين $\text{ل} + \text{ى}\sqrt{-1}$ و $\text{ل} - \text{ى}\sqrt{-1}$ وذلك بان يوضع ل بدل ح و $-\text{ى}^2$ بدل د فيحدث

(٣) $\sqrt{\text{ل} + \text{ى}\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\text{ل} + \sqrt{\text{ل}^2 + \text{ى}^2}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{\text{ل}^2 + \text{ى}^2} - \text{ل}}{2}}\sqrt{-1}$

(٤) $\sqrt{\text{ل} - \text{ى}\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\text{ل} + \sqrt{\text{ل}^2 + \text{ى}^2}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{\text{ل}^2 + \text{ى}^2} - \text{ل}}{2}}\sqrt{-1}$

بند واذا اريد تحصيل الجذرين التربيعيين للمقدارين التخيليين $+\sqrt{-1}$ و $-\sqrt{-1}$ فانه يلزم في القانونين (٣) و (٤) جعل $\text{ل} = 0$ و $\text{ى} = 1$ فيحدث

$$\pm\sqrt{+\sqrt{-1}} = \pm\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \text{ و}$$

$$\pm\sqrt{-\sqrt{-1}} = \pm\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

وحينئذ يكون الجذران التربيعيان للمقدارين $+\sqrt{-1}$ و $-\sqrt{-1}$ كناية عن المقدارين المحصلين للمجهول ز في المعادلة $\text{ز}^4 = -1$ لانه يمكن وضع هذه المعادلة بالصورة $(\text{ز}^2)^2 = -1$ التي يؤخذ منها أن $\text{ز}^2 = \pm\sqrt{-1}$ ويؤخذ ايضاً من المعادلة $\text{ز}^4 = -1$ أن ز جذر بدرجة رابعة للمقدار -1 ومن هنا يعلم انه يوجد للمقدار -1

اربعة

أربعة جذور بدرجة رابعة هي

$\frac{+١\sqrt{-٣}}{٢}$ و $-\frac{+١\sqrt{-٣}}{٢}$ و $\frac{-١\sqrt{-٣}}{٢}$ و $-\frac{-١\sqrt{-٣}}{٢}$

ويلزم لتحصيل الجذور التي بدرجة رابعة لكمية كالكمية جـ

ان نحل المعادلة $ز^{٤} = جـ$

بان يقال اذا فرض في مبداء الأمر ان الكمية جـ موجبة ثم جعل جـ رمزاً للعدد الذي تكون به قوته الرابعة مساوية للكمية جـ وفرض ان ز = حـ ص آلت المعادلة $ز^{٤} = جـ$ الى

$حـ^{٤} ص^{٤} = حـ^{٤}$ ومنها يؤخذ أن $ص^{٤} = ١$ أو $ص^{٤} - ١ = ٠$

وحيث أن $ص^{٤} - ١$ هو حاصل ضرب $ص^{٢} - ١$ في $ص^{٢} + ١$ فيمكن تحويل المعادلة $ص^{٤} - ١ = ٠$ الى المعادلتين

$ص^{٢} - ١ = ٠$ و $ص^{٢} + ١ = ٠$

فأما المعادلة الأولى فيؤخذ منها $ص = \pm ١$ وأما الثانية فيحصل منها $ص = \pm\sqrt{-١}$ فاذا ضربت مقادير ص الأربعة في حـ تحصلت للكمية جـ أربعة جذور بدرجة رابعة هي

$+حـ$ و $-حـ$ و $+حـ\sqrt{-١}$ و $-حـ\sqrt{-١}$

واذا فرض ان الكمية التي يراد تحصيل جذورها الأربعة سالبة

ووضعت بالصورة $-ج$ لزم لذلك أن تحل المعادلة

$$ز^{٤} = -ج$$

فاذا جعل أيضاً $ح$ رمزاً للعدد الذي تكون قوته الرابعة مساوية للكمية $ج$ وفرض أن $ز = ح ع$، فان المعادلة $ز^{٤} = -ج$ تتحول الى المعادلة $ح^{٤} ع^{٤} = -ح^{٤}$ أو $ع^{٤} = -١$

التي يؤخذ منها أن الجذور الأربعة للكمية $-ج$ تتحصل بواسطة ضرب الجذور الأربعة للمقدار -١ (المتحصلة كما في البند السابق) في الجذر $ح$

وإذا جعل $ك$ رمزاً للعدد صحيح و $ج$ رمزاً للكمية حقيقية أو لمقدار تخيلي وفرضت المعادلة

$$(٥) \quad \ldots\ldots\ldots \quad ز^{ك} = ج$$

كانت مقادير $ز$ المحققة لهذه المعادلة جذوراً بالدرجة $ك$ للكمية $ج$ ولذلك يمكن وضع هذه المعادلة بالصورة

$$(ز^{ك-١})^{ز} = ج$$

وهذه المعادلة يؤخذ منها للمجهول $ز^{ك-١}$ مقداران كلاهما يتكون من

منه للمجهول $ز^{ك-١}$ مقداران وكلا هذين المقدارين الجديدين يتكون
منه للمجهول $ز^{ك-٢}$ مقداران وهكذا الى أن يحصل للمجهول ز عدد
من المقادير يساوى $ز^{ك}$ وجميع هذه المقادير تؤول الى كميات
توضع بالصورة $ع + ص \sqrt{-١}$ لانه قد تقدم ان الجذور التربيعية
لأى مقدار موضوع بهذه الصورة هى مقادير توضع بالصورة المذكورة
ويبرهن بالسهولة على ان جميع المقادير المتحصلة للمجهول ز مختلفة
بعضها عن بعض فيقال اذا تحققت هذه النظرية فى المعادلة
$ز^{ك-١} = ج$ تحققت ايضاً فى المعادلة $ز^{ك} = ج$ وحينئذ اذا فرض
أن $أ + ب \sqrt{-١}$ و $م + ن \sqrt{-١}$ كناية عن مقدارين تخيليين غير متساويين
من مقادير المجهول ز بهما تحقق المعادلة $ز^{ك-١} = ج$ كانت مقادير
المطابقة لهذه المقادير فى المعادلة $ز^{ك} = ج$ هى الجذور التربيعية
هذين المقدارين التخيليين لكنه يلزم بمقتضى المعادلتين المتقدمتين
(خ ٣٩٣) ان يكون الجذران التربيعيان للكمية $أ + ب \sqrt{-١}$
مختلفين عن بعضهما وان يكون الجذران التربيعيان للكمية $م + ن \sqrt{-١}$
مختلفين عن بعضهما ايضاً وزيادة على ذلك يكون كل واحد منهما مختلفاً
عن الجذرين التربيعيين للكمية الأولى لانه ان كان الأمر بخلاف ذلك

ورفع هذان الجذران الى القوة الثانية كان الناتج واحداً وبناء على ذلك لا تكون الكميان م + ن √(−١) و م − ن √(−١) مختلفتين عن بعضهما وهذا مخالف للفرض

بند ٢٤٢ فاذا فرضت المعادلة

(٦) ..... $ز^{م} = ج$

وجعل م رمزاً لعدد صحيح كانت المقادير المتحصلة للمجهول ز من هذه المعادلة جذوراً بالدرجة م للكمية ج فان كان م عدداً زوجياً وضع بالصورة ٢ × ٢^{ك} وحيث أن ٢ هو عدد فرضي فان فرضت المعادلة $ز^{٢^{ك}} = ص$ تحولت المعادلة (٦) الى

(٧) ..... $ص^{٢} = ج$

ومتى امكن تعيين مقادير ص المحققة لهذه المعادلة تحصل المجهول من كل مقدار مفروض لهذا المجهول بواسطة العمليات المتوالية التي تجرى لاستخراج الجذور التربيعية عدد من المقادير يساوي ٢^{ك}

واذا لوحظت الحالة التي تكون فيها ج كمية حقيقية موجبة أو سالبة وكان ٢ = ٢ آلت المعادلة (٧) الى

(٨) ..... $ص^{٢} = ج$

اذا فرض

واذا فرض انه صار استخراج الجذر التكعيبي لمقدار جـ المطلق بواسطة الفرق الحسابية وحصل د ومثل هذا الجذر التكعيبي المأخوذ بعلامة كلامة الكبة جـ كان جـ = $د^3$ واذا كان ص = د س آلت المعادلة (٨) الى

$د^3 س^3 = د^3$ ومن هنا ينتج أن $س^3 = ١$ أو $س^3 - ١ = ٠$.

وحينئذ يكون $س^3 - ١$ قابلاً للقسمة على س - ١ (كما في بند من الجزء الأول) ويكون خارج القسمة هو $س^2 + س + ١$ وبناء على ذلك يمكن وضع المعادلة $س^3 - ١ = ٠$ بالصورة

$(س - ١)(س^2 + س + ١) = ٠$.

فإذاً يلزم لكي يكون حاصل ضرب جملة مضاريب حقيقية أو تخيلية معدوماً ان يكون واحد من هذه المضاريب معدوماً (كما في بند ٣٣٦)

[illegible] جذور المعادلة $س^3 - ١ = ٠$ بواسطة حل المعادلتين

س - ١ = ٠ و $س^2 + س + ١ = ٠$.

فيؤخذ من المعادلة س - ١ = ٠ أن س = ١ ومن المعادلة $س^2 + س + ١ = ٠$

أن $س = \frac{-١ \pm \sqrt{-٣}}{٢}$ أو $س = \frac{-١ \pm \sqrt{٣}\sqrt{-١}}{٢}$

ومن هنا يعلم ان المعادلة لها ثلاثة جذور تكعيبية

$\frac{-١ + \sqrt{٣}\sqrt{-١}}{٢}$ و $\frac{-١ - \sqrt{٣}\sqrt{-١}}{٢}$

فاذا ضربت هذه الجذور التكعيبية الثلاثة للواحد في ح كانت جميع الجذور التكعيبية للكمية ح

واذا اريد معرفة الكيفية التي يكون بها المقدار ½(-١+√-٣) جذراً تكعيبياً لزم ان يرفع هذا المقدار الى القوة الثالثة وذلك برفعه الى القوة الثانية فيتحصل من ذلك المقدار ½(-١-√-٣) الذي يتحصل من ضربه في ½(-١+√-٣) حاصل ضرب هو الواحد. وذلك يفرض أن مكعب ½(-١-√-٣) يساوي الواحد

ويستنبط من هذه العمليات الحسابية ان كل واحد من الجذرين التكعيبيين التخيليين للواحد عبارة عن مربع الآخر وحينئذ اذا رمز للاختصار الى احد من هذين الجذرين بالرمز ل كان الآخر مبيناً بالرمز ل² واذا جعل ح كما كان رمزاً للجذر التكعيبي الحقيقي للكمية ح كانت الجذور الثلاثة التكعيبية للكمية ح مبينة بالرموز ح ، ح ل ، ح ل²

٢٤٤ ويكفي لتحصيل الجذور التي بدرجة سادسة لأي كمية ان توجد الجذور التربيعية لكل من الجذور الثلاثة التكعيبية لهذه الكمية فاذا فرض ان الكمية المفروضة موجبة ورمز اليها بالرمز + ح

ويجعل ح رمزاً للعدد الذي اذا رفع الى القوة الثالثة تحصلت منه الكمية ج كانت الجذور الثلاثة التكعيبية لهذه الكمية مبينة بالرموز ح و ح ل و ح ل^٢ والجذور التربيعية لجذر ح مبينة بالرمز ± ح والجذور التربيعية للجذر ح ل مبينة بالرمز ± ح ل^٢ وتحصيل الجذور التربيعية للجذر ح ل ينبه على ان الارتباط ل^٢ = ١ يؤخذ منه ل = ل ومن هنا ينتج ان الجذور التربيعية للجذر ح ل تكون مبينة بالرمز ± ح ل^٢ وحينئذ تكون الجذور التي بدرجة سادسة للكمية ج مبينة بالرمز

± ح و ± ح ل و ± ح ل^٢

ويمكن تحصيل هذه الجذور بكيفية اخرى هي انه اذا رمز الى واحد منها بالرمز ز تحصلت من ذلك المعادلة

ز^٦ = ج

ولنرمز ايضاً بالرمز ح الى العدد الذي اذا رفع الى القوة الثالثة تحصلت منه الكمية + ج فتكون ج = ح^٣ فاذا فرض ز = ح ص آلت المعادلة ز^٦ = ج الى الصورة

ح^٦ ص^٦ = ح^٣ ومنها ينتج أن ص^٦ = ١ أي ص^٦ − ١ = ٠

وحيث ان ص^٦ - ١ كناية عن حاصل ضرب ص^٣ - ١ فى ص^٣ + ١ فيمكن استعواض المعادلة ص^٦ - ١ = ٠ بالمعادلتين

ص^٣ - ١ = ٠ و ص^٣ + ١ = ٠

وحيث ان جذور المعادلة ص^٣ - ١ = ٠ هى ١ و ل و ل^٢ فتكون جذور المعادلة ص^٣ + ١ = ٠ هى - ١ و - ل و - ل^٢ فاذا ضربت هذه المقادير الستة المفروضة للمتغير ص فى ح كانت الجذور الستة الخيالية ح^٦ هى + ح و + ح ل و + ح ل^٢ و - ح و - ح ل و - ح ل^٢ و

يتبين ويستنبط من الملحوظات المتقدمة ان الجذور التى درجتها قوة من قوى العدد ٢ أو حاصل ضرب العدد ٣ فى قوة من قوى ٢ تكون لها مقادير بقدر ما يوجد فى درجتها من الآحاد

وقد تقدم أن هذه النظرية تشتمل على جذور سائر الدرجات لانه اذا رمز بالحرف م لعدد صحيح كان دائماً للكمية الحقيقية أو للمقدار الموضوع بالصورة ع + ك √-١ جذور عددها م بالدرجة م وحينئذ توضع جميع المقادير التخيلية لهذه الجذور بالصورة ع + ك √-١

في المعادلات ذات الحدين ومعادلات ذات الحدود الثلاثة التي يمكن تحويلها الى معادلات ذات حدين

بند ٢٤٥ يطلق اسم المعادلات ذات الحدين على المعادلات التي يمكن وضعها بالصورة

(١) ..... س^م − جـ = ٠

و جـ هي كناية عن كمية معلومة

وجذور المعادلة (١) هي المقادير المتنوعة الجبرية التي تفرض للكمية √(جـ^م) وبناء على ذلك يكون لها جذور عددها م (كما في بند ٢٢٩) على اي وجه كان المقدار الحقيقي او التخيلي للكمية جـ وهذه الجذور تكون كلها غير متساوية لانه لا يوجد مضروب مشترك بين الكمية ذات الحدين س^م − جـ ومشتقتها ذات الدرجة الاولى م س^(م−١) وحينئذ يكون للمقدار الجذري √(جـ^م) باعتبار جبريًا مقادير عددها م مختلفة بعضها عن بعض

فاذا جعل جـ رمزًا لواحد من مقادير الكمية الجذرية √(جـ^م) أعني لواحد من جذور المعادلة (١) كان جـ^م = جـ واذا فرض س = جـ ص ووضع مقدار س هذا في المعادلة امكن وضعه

[illegible] ن عددها على ط تحصلت من ذلك المعادلة

[illegible] ..... س ن − ١ = ٠

[illegible] من ذلك تتحصل جميع مقادير $\sqrt[ن]{ج}$ بواسطة ضرب اى واحد

[illegible] مقادير $\sqrt[ن]{ج}$ التى عددها ن

[illegible] من أن الحد المعلوم من المعادلة ذات الحدين كمية حقيقية

[illegible] هذا الحد بالرمز ± ج بفرض ج كمية موجبة آلت المعادلة

(٢) الى

(٣) ..... $س^ن \mp ج = ٠$

[illegible] الحل [illegible] من الواحد من المقادير الوقية للكمية الجذرية

[illegible] = ح ص آلت المعادلة (٣) الى المعادلة

..... $ص^ن \mp ١ = ٠$

[illegible] أن المعادلة (٤) هذه عكسية فيلزم حلها بالمثابة المتقدمة

[illegible] بند ٣٢٩ و ٣٣٠)

[illegible] فرض فى مبدإ الامر أن م كناية عن عدد فردى كالعدد ٢م+١

ثم لو حلت المعادلة

(٥) ..... $ص^{٢م+١} - ١ = ٠$

لان

كما أن هذه المعادلة [illegible] لها جذر حقيقي غير
[illegible] المفروضة للتغير
[illegible] مختلف عن الواحد
كان $ص^{ن+١}$ غير [illegible]

وإذا قسم الطرفان الأولان للمعادلة المفروضة على ص − ١ تحصلت
من ذلك المعادلة

(٦) ..... $ص^{ن} + ص^{ن-١} + ص^{ن-٢} + ... + ص + ١ = ٠$

وحل هذه المعادلة له [illegible] الحل معادلة نصفها في الدرجة (كما في بند ٣٢٩)
والمعادلة $ص^{ن+١} + ١ = ٠$ لها جذر يساوي − وأما جذورها
الأخرى فهي تخيلية

ولتعيين هذه الجذور يلزم في المعادلة حذف المضروب ص − ١
الذي يحصل من حذفه معادلة مكعبة درجتها ٢ن فإذا
[illegible] تحصلت جذور المعادلة $ص^{ن+١} - ١ = ٠$. لزم
تغيير علامات هذه الجذور لتحصل من ذلك للمعادلة $ص^{ن+١} + ١ = ٠$
فإذا جعل م رمز العدد زوجي كالعدد ٢ن كان للمعادلة
$ص^{٢ن} - ١ = ٠$ جذران حقيقيان هما +١ ، −١ وأما باقي جذورها

فانها تكون تخيلية ولتعيين هذه الجذور يلزم ان تقسم المعادلة المفروضة على $\text{ص} - ١$ فتحصل من ذلك معادلة عكسية درجتها $٢\text{ج} - ٢$ لا تكون مشتملة الا على قوى زوجية للمجهول لكنه يسهل حل المعادلة $\text{ص}^{٢\text{ج}} - ١ = ٠$ بواسطة قسمتها الى المعادلتين $\text{ص}^{\text{ج}} - ١ = ٠$ و $\text{ص}^{\text{ج}} + ١ = ٠$

وحيث ان المعادلة $\text{ص}^{٢\text{ج}} + ١ = ٠$ لها جذور تخيلية فقط فيلزم تحويلها الى معادلة نصفها فى الدرجة بأن يجعل $\text{ص} + \frac{١}{\text{ص}} = \text{ز}$ ويمكن ايضا ان حل المعادلة $\text{ص}^{٢\text{ج}} + ١ = ٠$ يؤول الى حل معادلة ذات حدين فردية الدرجة وذلك بأن يجرى عليها الطريقة المتقدمة (فى بندى ٣٤٢ و ٣٤٣)

بند ٣٤٧ ومما ينبغى التنبيه عليه انه اذا حذفت الجذور الحقيقية للمعادلة $\text{ص}^{\text{ن}} \mp ١ = ٠$ بأن وضع فيها $\text{ص} + \frac{١}{\text{ص}} = \text{ز}$ كانت جميع جذور المعادلة المشتملة على ز حقيقية دائما ولذا يفرض ان $\text{ل} + \text{ء}\sqrt{-١}$ احد المقادير التخيلية للمتغير ص فيكون عكس هذا المقدار هو $\frac{١}{\text{ل} + \text{ء}\sqrt{-١}}$ وحيث ان

$$\frac{١}{\text{ل} + \text{ء}\sqrt{-١}} = \frac{\text{ل} - \text{ء}\sqrt{-١}}{(\text{ل} + \text{ء}\sqrt{-١})(\text{ل} - \text{ء}\sqrt{-١})} = \frac{\text{ل} - \text{ء}\sqrt{-١}}{\text{ل}^{٢} + \text{ء}^{٢}}$$

وان

وأن [illegible] جذر [illegible]

[illegible]

فتكون [illegible]

يحدث [illegible]

[illegible]

[illegible]

وهيئان [illegible]

ومن [illegible]

ومن [illegible]

حقيقية

[illegible] الأمثلة [illegible]

[illegible] التي جذورها التخيلية هي مقادير

المقادير [illegible]

[illegible]

وثانيا [illegible]

غير [illegible]

وثالثاً معادلة $س^3 + 1 = 0$ التي جذورها هي

$ص = \pm 1$ ، $س = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,ت}{2}$ ، $س = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,ت}{2}$

ورابعاً المعادلة $س^4 - 1 = 0$ التي جذورها مركبة من جذور المعادلة

السابقة $س^2 + 1 = 0$ ومن جذور المعادلة $س^2 - 1 = 0$

التي يمكن تحليلها الى المعادلتين $س + 1 = 0$ ، $س - 1 = 0$

بند ٣٤٩ والقواعد المتقدمة (في بندي ٣٤٧ ، ٣٤٨) تؤدي الى ايجاد جذور المعادلة $س^2 + 1 = 0$ في الحالة التي يكون فيها أن م دالة على قوة العدد ٢ ، أو على حاصل ضرب عدد من العدد ٢ أو ٥ في أي قوة للعدد ٢ ، فاذا كانت هذه المقادير دالة على خطوط مساحية امكن باستعمال طريقة تعيين هذه الجذور مهما كان مقدار الكمية (م)

بند ٣٥٠ ويطلق اسم المعادلة ذات الحدود الثلاثة على كل معادلة يمكن وضعها بالصورة

(٧) ..... $س^{2م} + ج س^{م} + ك = 0$ ..... (٧)

فاذا فرض في هذه المعادلة أن $س^م = ص$ حدث

$ص^2 + ج ص + ك = 0$

واذا

[illegible] امكن استخراج

مقادير من هذه المعادلتين [illegible]

[illegible]

فان كانت كلتا لهما حقيقيتين [illegible] ناتج من هاتين المعادلتين

الى الناتج من المعادلة [illegible]

وإذا كانت كلتا لهما تخيليتين فلا يمكن [illegible] بوجود

المعادلة [illegible] بواسطة [illegible] التي تكون

فيها [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] الى

معادلة لزم جعل [illegible] موضوعة بعلامتها الجذرية

مساوية لمجهول ما فيحصل من ذلك عدة معادلات

[illegible] فاكل واحدة منها الى المعادلة المبينة بدليل الجذر

وبضم هذه المعادلات الى المعادلة المتحصلة من استعواض

علامة الجذر بالمجهول التي جعلت مساوية له في المعادلة الأصلية

[illegible] جملة من [illegible] على المعادلة المطلوبة

بعد أن نحذف جميع [illegible] الداخلة فيها

ولنمثل [illegible]

$$\sqrt[3]{\text{س}+\text{ب}} + \sqrt{\text{س}-\text{ج}} = \text{ا}$$

فاذا وضع $\sqrt[3]{\text{س}+\text{ب}} = \text{ص}$ و $\sqrt{\text{س}-\text{ج}} = \text{ز}$ حدث

$$\text{ص}^3 = \text{س}+\text{ب} \quad \text{و} \quad \text{ز}^2 = \text{س}-\text{ج}$$

واذا حذف المجهولان ص و ز من هاتين المعادلتين ومن المعادلة

ص + ز = ا تحصل من المعادلة الأخيرة

$$\text{ص} = \text{ا} - \text{ز}$$

واذا وضع ا − ز بدل ص في المعادلة $\text{ص}^3 = \text{س}+\text{ب}$ آلت الى

$$\text{س}+\text{ب} = \text{ا} - \text{ز}^3 + \text{ا}^2\text{ز} - \text{ا}\text{ز}^2$$

واذا حذف ز من هذه المعادلة ومن المعادلة $\text{ز}^2 = \text{س} - \text{ج}$

تحصلت من ذلك المعادلة

$$\text{ا}^6 - \text{ا}^3 + \text{ا}^2 - \text{ا}\text{س} + \text{ب} - \text{س} = \text{ا}^3 - \text{ا}^2 + \text{ا}\text{س} - \text{ب} - \text{س} = 0$$

وهذا الناتج يتخلص بحذف العلامات الجذرية من المعادلة

المفروضة وذلك بأن يرفع طرفاها الى القوى المتوالية وتحول

[illegible]

فلو مقتبس التفكير الطريق الثاني وفرض المعادلة بالصورة

[illegible]

وبرفع المربع الى القوة [illegible] والحدود المتشابهة

[illegible]

وبجمع طرفي المعادلة من القوة المناسبة تتحصل المعادلة

[illegible] = ٠

وهذه المعادلة لها ثلاثة جذور أحدها منطق وهو ٥ والجذران الآخران المستخرجان من المعادلة ١٦ س² − ١٠٤ س + ٢٨١ = ٠ تخيليان

فأما الجذر الحقيقي س = ٥ فانه لا يكون محققاً للمعادلة المفروضة في الحالة التي لا تلاحظ فيها غير المقادير الرقمية للعلامات الجذرية الا انه يكون محققاً لهذه المعادلة اذا تغيرت علامة √(س − ٤)

فاذا حذفت العلامات الجذرية الموجودة في معادلة تحصلت من المعادلة المنطقة الحادثة من ذلك جميع المقادير المجهولة للمعادلة المفروضة وجميع المعادلات الناتجة منها وذلك بملاحظة المقادير المتنوعة للعلامات الجذرية لانه اذا جعلت كل علامة بما تحتها مساوية لمجهول ورفع طرفا المعادلة الى قوة درجتها كدرجة

[illegible] من ذلك معادلات لا تتغير بالنسبة لجميع
[illegible] يمكن أن تحدد جذور المعادلة النهائية
[illegible] بواسطة [illegible] لا تحقق به المعادلة
[illegible] بالعلامات الجذرية وفي هذه الحالة
تكون معادلة المفروضة بهذه المثابة فاسدة

[illegible] يمكن بواسطة القواعد [illegible] معادلة مضطربة بفرض
[illegible] مركبة [illegible] وبذلك يتوصل الى معادلة تكون جذورها
هي [illegible] المتوسطة التي تأخذها الكمية المفروضة على سطح جميع
مقادير كل من العلامات الجذرية الداخلة فيها

واذا فرض انه [illegible] تحصيل معادلة مجردة عن العلامات الجذرية
وفرض ان جذر هو الكمية $س = \sqrt[3]{ح} + \sqrt[3]{ع}$
فانه يكون $ز = \sqrt[3]{ح} = ص$ و $\sqrt[3]{ع} = ز$

ومنها يحدث $ح = ص^3$ و $ع = ز^3$ و $س = ص + ز$

وبناء على ذلك يمكن تحصيل المعادلة المطلوبة بواسطة حذف $ز$
من المعادلات الثلاث المذكورة

ويمكن تحصيل هذا الناتج بواسطة حذف العلامات الجذرية من المعادلة
التي

[illegible] فاذا رفع طرفاها س = √ح − √د (٣٠١) [illegible] المتوالية [illegible]
[illegible] الآخر

ن = [illegible]

[illegible] يمكن رسم [illegible]

[illegible]

فاذا رفع س بدل √ح + √د [illegible] المتوالية
خصصت عن ذلك معادلة بدرجة [illegible] عن [illegible]
ويمكن ايضاً تعيين المعادلة [illegible] بهذه الكيفية [illegible]
[illegible] المقادير المتنوعة [illegible] √ح + √د
وذلك عند ما يوجد [illegible] الامكان بين الجذور التكعيبية [illegible]
والجذور التكعيبية [illegible]
فاذا رمز لواحد من الجذرين التكعيبيين المتخيلين للواحد بالرمز
ن فان الجذر الآخر يكون [illegible] (كما في بند ٣٤٢)
وحينئذ [illegible] مقادير المتغير س
مطابقة لمصادرين

[illegible]

[illegible] ان [illegible]

[illegible] كناية عن الجذور الثلاثة

للمعادلة [illegible]

فاذا اجريت عملية الانتصار [illegible] مرتين عقب كل عملية

ضرب كانت حاصل ضرب الكل [illegible] من معادلة بدرجة تاسعة

[illegible] ومجردة من الجذور [illegible]

استعمال المشتقات في المسائل المتعلقة بالنهايتين

الكبرى والصغرى

[illegible] اذا فرض ان [illegible] واحدة من دلالة المتغير س وفرض

[illegible] المتغير مقدار مخصوص كالمقدار ه انفق على مقدار الدلالة

المطابقة لهذا المقدار اسم النهاية الكبرى والصغرى اذا فرض [illegible] المذكور

مقادير تكون [illegible] اقرب قربا لا [illegible] من

المقدار ه المذكور وكانت مقادير الدلالة المطابقة [illegible] الكبرى والصغرى [illegible] فرض

[illegible]

س = ح وحينئذ اذا جعل ك رمزًا للزيادة التي تفرض للتغير س لزم لكي يكون س = ح دالاً على النهاية الكبرى او الصغرى ان يكون الفرق د(ح + ك) − د(ح) سالبًا دائمًا أو موجبًا دائمًا مهما كانت علامة الكمية ك بشرط ان تكون هذه الكمية المتزايدة صغيرة بالكفاية

ويمكن ايضًا ان يقال ان المقدار س = ح تؤخذ منه النهاية الكبرى او الصغرى للدلالة عندما يأخذ س في الازدياد حتى يتجاوز المقدار ج وتأخذ الدلالة في الازدياد الى الحد الذي تأخذ منه في التناقص أو عندما يأخذ س في التناقص الى المقدار ج وتأخذ الدلالة في التناقص الى الحد الذي تأخذ منه في الزيادة

وقد شوهد انه اذا كانت الدلالة المبينة بالرمز د(س) تامة حدث

$$د(س + ك) = د(ح) + د'(ح)\, ك + د''(ح) \frac{ك^2}{1 \times 2} + \text{الخ}$$

ومن هنا يؤخذ

$$(1) \ldots \quad د(ح + ك) - د(ح) = د'(ح)\, ك + د''(ح) \frac{ك^2}{1 \times 2} + \text{الخ}$$

فاذا فرض للكمية ك مقدار صغير بالكفاية كان الطرف الثاني من هذه المتساوية مخالفًا في العلامة مع حدها الاول فاذًا لما لم تنعدم الدلالة د'(ح) كان الفرق د(ح + ك) − د(ح) مخالفًا

في الصدمة مع الكمية ك واذاً لا يمكن ان تكون الدلالة ر(ح) هي النهاية الكبرى ولا الصغرى

واذا كانت الدلالة ر'(ح) معدومة وكانت الدلالة ر''(ح) غير معدومة كان الفرق ر(ح+ك) - ر(ح) متحداً في العلامة دائماً مع ك بشرط ان تكون هذه الكمية صغيرة بالكفاية وحينئذ اذا كانت الدلالة ر''(ح) كمية سالبة كانت الدلالة ر(ح) هي النهاية الكبرى واذا كانت الدلالة ر''(ح) كمية موجبة كانت الدلالة ر(ح) هي النهاية الصغرى فاذا كانت الدلالة ر'(ح) = ٠ والدلالة ر''(ح) = ٠ في آن واحد فلا يتحصل من المقدار س = ح واحدة من النهايتين الكبرى او الصغرى، مالم تكن الدلالة ر'''(ح) = ٠ ايضاً لانه يتحصل في هذه الحالة المقدار س = ح نهاية هي الكبرى اذا كانت الدلالة ر'''(ح) كمية سالبة ونهاية اخرى هي الصغرى اذا كانت الدلالة ر'''(ح) كمية موجبة

ويلزم على العموم لكي تحصل من المقدار س = ح النهاية الكبرى او الصغرى للدلالة ر(س) ان تكون الدلالة الاولى التي لم تعدم من بين مشتقات الدلالة ر(س) مشتقة زوجية المرتبة فان كانت

كانت هذه الدلالة كمية سالبة تحصلت من المقدار س = ح نهاية صغرى للكبرى وان كانت موجبة تحصلت منه نهاية هي الصغرى

مثلاً اذا كان ر(س) = س^{٣} - ٩ س^{٢} + ١٥ س - ٣ وجعلت الدلالة المشتقة من الدلالة ذات الدرجة الاولى مساوية للصفر تحصلت من ذلك المعادلة

س^{٢} - ٦ س + ٥ = ٠

التي يكون جذراها هما ١ و ٥ وحيث ان المقدار س = ٠ يصيّر الدلالة ر'(س) مساوية للمقدار -١٢ فيكون المقدار الذي تأخذه الدلالة ر(س) في فرض س = ١ هو النهاية الكبرى وحيث ان المقدار س = ٥ يصيّر الدلالة ر'(س) مساوية للمقدار +١٢ فيترتب عليه ان الدلالة ر(س) تكون هي النهاية الصغرى

وان كان ر(س) = س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٣ س + ٧

وكانت المشتقة الاولى من هذه الدلالة هي ٣ س^{٢} - ٦ س + ٣ أو ٣ (س - ١)^{٢} فلا يمكن انعدامها الا في فرض س = ١ وحيث ان هذا المقدار المفروض للمتغير س يصيّر مساواة ر'(س) معدومة والدلالة ر''(س) كائنة عن عدد فلا تكون للدلالة

المفروضة واحدة من النهايتين الكبرى والصغرى

سند ٣٥٤ ومتى كانت الدلالة ء(ح) غير معدومة كان الفرق ء(ح+ك) - ء(ح) بالنسبة لمقادير موجبة دون الكمية ك متحدًا فى العلامة مع الدلالة ء(ح) وبناءً على ذلك اذا فرض للمتغير مقادير آخذة فى الزيادة أخذت الدلالة ء(س) فى الزيادة ان كانت المشتقة ء'(س) كمية موجبة وفى التناقص ان كانت هذه المشتقة كمية سالبة ويمكن ان يستنبط من هنا انه اذا كانت الدلالة ء(س) هى النهاية الكبرى أو الصغرى كان ء'(س) = ٠ لانه يلزم بسبب ان الدلالة ء(س) لا تزال آخذة فى الزيادة الى الحد الذى تأخذ منه فى التناقص أو انها لا تزال آخذة فى التناقص الى الحد الذى تأخذ منه فى الزيادة ان علامة الدلالة ء'(س) تتغير وهذا لا يتأتى الا اذا انعدمت هذه الدلالة وكذلك اذا كانت المشتقة ء'(س) كمية موجبة تزايدت الدلالة ء(س) واخذت فى الانتقال من السلب الى الايجاب حتى انعدمت وبناءً على ذلك يكون للدلالة ء(س) نهاية هى الصغرى واذا كانت المشتقة ء'(س) المذكورة كمية سالبة اخذت الدلالة ء(س) فى الانتقال من الايجاب الى السلب

حتى انعدمت وحينئذٍ يكون مدلالة ء(س) نهاية هي الكبرى

بند ٥٥ فاذا وضع س بدل هـ في المتساوية (١) وقسم طرفاها على

ك تحصل

$$\frac{ء(س+ك)-ء(س)}{ك} = ءَ(س)+\frac{ك}{١\times٢}ءَ''(س)+\frac{ك^٢}{١\times٢\times٣}ءَ'''(س)+\text{لخ}$$

وحيث ان الدلالات المشتقة ءَ(س) و ءَ''(س) و لخ تامة بالنسبة

الى س فتكون لها دائماً مقادير انتهائية مادام للمتغير س

مقدار انتهائي وحينئذٍ يمكن أخذ الكمية ك صغيرة بالكفاية

حتى يكون المقدار الرقمي للكمية

$$\frac{ك}{١\times٢}ءَ''(س)+\frac{ك^٢}{١\times٢\times٣}ءَ'''(س)+\text{لخ}$$

دون عدد مفروض كالعدد ط الذي يقرب من الصفر بقدر

ما يراد كما تقدم (في بند ٥٨) وحينئذٍ يتحصل

$$\frac{ء(س+ك)-ء(س)}{ك} > ءَ(س)-ط \quad \text{و} \quad \frac{ء(س+ك)-ء(س)}{ك} < ءَ(س)+ط$$

وبناء على ذلك اذا اخذت كمية من دلالة تامة في الازدياد بالتدريج

كانت النسبة بين هذا الازدياد وهذه الكمية المتغيرة كمية

انتهائية مساوية بالتقريب للمقدار الذي تأخذه مشتق الدلالة

ذات المرتبة الأولى المشتقة من الدلالة المفروضة بالنسبة للمقدار الأصلي المفروض للكمية المتغيرة المذكورة

أو ان الدلالة ذات المرتبة الاولى المشتقة من دلالة تامة لكمية متغيرة تكون كناية عن نهاية النسبة الواقعة بين كل من ازدياد الدلالة المذكورة وازدياد الكمية المتغيرة

في طريقة المكررات غير المعينة

بند ٣٥٦ قد تقدم انه اذا اجريت عملية قسمة وكان فيها المقسوم والمقسوم عليه مرتبين بحسب الدرجات التصاعدية لكمية كالكمية س امكن تعيين خارج مركب من جملة حدود مرتبة بحسب الدرجات التصاعدية للحرف س وممتد الى غير نهاية واستخراجات جذور الكميات الجبرية توصل الى تحليلات كميات مركبة من جمل غير متناهية ولنبرهن على انه يمكن ايضاً تحليل مقدار كسري أو غير منطق بدون أن نطبق على ذلك عملية قسمة او استخراج جذر فنفرض في مبدء الأمر

$$\frac{\text{جـ} + \text{د س} + \text{هـ س}^2}{\text{م} + \text{ن س} + \text{و س}^2 + \text{ك س}^3}$$

ثم نرمز الى خارج قسمة هذا الكسر بالجملة

$$\text{أ} + \text{ب س} + \text{جـ س}^2 + \text{د س}^3 + \text{ه س}^4$$

وحيث

وحيث ان المكررات جـ و ء و هـ و و و ح كميات غير متساوية على التقدير [illegible] سيراد تعيينها فيلزم ان يتحصل من الخارج المذكور بواسطة ضربه في الكمية الكثيرة الحدود م + ق س + ع ش + ك ش المقسوم حـ + و س + هـ ش م وباجراء عملية الضرب يتحصل حاصل الضرب

م جـ + م ء	س + م هـ	ش + م و	ش + م ز
+ ق جـ	+ ق ء	+ ق هـ	+ ق ء
	+ ع جـ	+ ع ء	+ ع جـ
		+ ك جـ	+ ك ء

ويلزم لكي يكون هذا الحاصل مساويا لمقسوم الضرب ان تكون المكررات الثلاثة الاول تكون مساوية بالتناظر للمكررات الثلاثة حـ و و هـ وان مكررات باقي الحدود تكون معدومة وبناء على ذلك يكون

م جـ = حـ

م ء + ق جـ = و

م هـ + ق ء + ع جـ = هـ

م و + ق هـ + ع ء + ك جـ = ٠

م ز + ق و + ع هـ + ك ء = ٠

فاما المعادلة الاولى فيتحصل منها مقدار المكرر جـ واما الثانية فيحدث منها مقدار المكرر ء بواسطة مقدار المكرر جـ واما المعادلة الثالثة فيعلم منها مقدار المكرر هـ بواسطة مقداري المكررات

ء ، ج وأما المعادلة الرابعة وما بعدها من المعادلات التي مثلها في الوضع فان مكررات خارج القسمة تحصل منها بالابتداء من مكرر القوة الثالثة للمتغير س بهذه المثابة وهي ان تجمع المكررات الثلاثة السابقة على بعضها بعد أن تضرب بالتناظر في النسب $\frac{م}{م}$ و $\frac{م}{م}$ و $\frac{م}{م}$ ويسهل تحصيل تحليلات الكميات الحادثة من المقادير غير المنطقة متى علم تحليل الكمية $(١+س)^{م}$ بفرض الاس م عدداً كسرياً موجباً أو سالباً وحيث ان الكمية المرفوعة الى قوة درجتها كسر عبارة عن جذر هذه الكمية بدرجة مساوية لمقام هذا الكسر بعد رفعها الى القوة التي درجتها بسطه فان كانت مرتبة بحسب الدرجات المتصاعدية او التنازلية كان جذرها كذلك وحينئذ يوضع

(١) .... $(١+س)^{م} = ١ + جـ س + ء س^{٢} + هـ س^{٣} + و س^{٤} + ح س^{٥}$

وحيث أن المكررات جـ ، ء ، هـ ، و ، ح ، ح ... كميات غير محتوية على متغير س سيراد تعيينها فنعلم مباشرة انه يلزم ان يكون الحد الأول من تحليل الكمية مساوياً للوحد لان المقدار $(١+س)^{م}$ يؤول الى ١ متى فرض س = ٠

فاذا كان $(ء+س)^{م} = ء^{م} (١+\frac{س}{ء})$ فانه يحصل من ذلك تحليل الكمية

$(ء+س)^{م}$ ء^م

[illegible] الطرف الثانى من المعادلة (١) [illegible]

[illegible] فى [illegible] فيحدث

(٢) ... [illegible]

[illegible]

فاذا وضع فى هذه المتساوية س + ع بدل س فانها تصير

(٣) ... (هـ + س + ع)^٣ = هـ^٣ + ٣ هـ^٢ (س + ع) + ٣ هـ (س + ع)^٢ + (س + ع)^٣

ويمكن ايضاً تحصيل تحليل لكمية (هـ + س + ع)^٣ بهذه المثابة وهى ان يوضع فى المعادلة (١) هـ + س بدل هـ و ع بدل س فيحدث

(٤) ... (هـ + س + ع)^٣ = (هـ + س)^٣ + ٣ (هـ + س)^٢ ع + ٣ (هـ + س) ع^٢ + ع^٣

وحيث ان الطرفين الثانيين من المعادلتين (٣) و (٤) كناية عن مقدارى كمية واحدة مختلفين فى وضع فيلزم ان يكونا متساويين ولما كان هذا التساوى لا يزال باقياً على حاله مادام لا ينسب للكمية ع مقدار مخصوص لزم ان تكون مكورات قوى ع متساوية

ويلزم لاجل تحصيل الكميات القوى المتنوعة للكمية ح في الطرف الثاني من المعادلة [illegible] البدء بتحليل المقادير (س+ع)^٢ و (س+ع)^٣ و ح

وحيث أن أسس هذه القوى أعداد صحيحة فنعلم تحليلات هذه المقادير مما تقدم لكن لما كانت الطريقة التي تصدينا لذكرها للتوصل بها الى تحليل الكمية (ح+س)^م غير مرتبطة بالاثبات المتقدم يمكن تطبيقها على الحالة التي يكون فيها م كناية عن عدد كسري موجب أو سالب

فاذا اجريت عملية الضرب على تحليلات الكميات (س+ع)^٢ و (س+ع)^٣ و ح فانه يشاهد بمثل ذلك ان الحدين الاولين من تحليل الكمية (س+ع)^٢ (بجعل ٢ كناية عن عدد صحيح) يكونان عبارة عن س^٢ + ٢ ع س^(٢-١) ويمكن ايضاً ان يبرهن بواسطة عملية الضرب على انه اذا كان تركيب الحدين الاولين محققاً في القوة النونية كان محققاً ايضاً في القوة (ن+١) وحيث ابرهنا ان هذا التركيب يكون عمومياً

وبذلك يشاهد ان الجزء الذي لا يحتوي على ع في الطرف الثاني

من المعادلة [illegible] كما سبق [illegible]

[illegible] + [illegible] س + [illegible] + [illegible] + [illegible]

وفى [illegible] السابقة عبارة عن اعداد ليس لها ارتباط بالكميتين
ر و س وان المعادلة المفروضة تتحقق بدون ان تفرض مقادير
مخصوصة لكل من ر و س فلابد من وقوع التساوى بين
مكررات قوى س و ر ومن هنا تتكون المعادلات

$$\left.\begin{array}{l} ٢ر + ج = ج^{٢} و \\ ٣ هـ + ٢ر = ج^{٣} ر و \\ ٤ و + ٣ هـ = ج^{٤} هـ و \end{array}\right| \text{ومن هنا ينتج } \left\{\begin{array}{l} ر = \dfrac{ج (ج^{٢} - ١)}{٢} و \\ هـ = \dfrac{ر (ج^{٣} - ٢)}{٣} و \\ و = \dfrac{هـ (ج^{٤} - ٣)}{٤ ج} و \end{array}\right.$$

ويسهل تناول القانون الذى قد تكونت بمقتضاه هذه المعادلات
ومنه يؤخذ انه اذا رمز بالرمزين ر و ك الى مكررى الكميتين
$س^{ج-١}$ و $س^{ج}$ فى الطرف الثانى من المعادلة (١) حدث
$ج ك + (ج - ١) ر = ج ر$ ومن هنا ينتج ان $ك = \dfrac{ر (ج - ج + ١)}{ج}$
ويمكن ايضاً تحصيل هذه المعادلة بهذه الكيفية وهى ان يوضع
فى المعادلة (١) الحدان $ر س^{ج-١} + ك س^{ج}$ وفى المعادلات
التى بعدها الحدود الناتجة من هذين الحدين
وحيث انه لم يبق علينا غير تعيين المكرر ج فنقول اذا كان
الاس م

الأعداد م [illegible] الوحدة

المقدار $(١+س)^{ن}$ [illegible] $(١+س)^{ن}$ [illegible] الحدين

الاولين من تحليل الكمية $(١+س)^{ن}$ هما $١+ن س$ ويؤخذ من

قاعدة الجذور ان الحدين الأولين من تحليل الكمية $(١+س)^{ن}$ هما

$١+جـ س$ ومن قاعدة القسمة ان الحدين الاولين من تحليل الكمية

$(١+س)^{ن-جـ}$ هما $١-جـ س$ وحينئذ يكون $جـ = م$ في جميع

الأحوال

وبتعويض هذا الوضع بدل جـ في المعادلة السابقة حصل

$$ن = \frac{ن(ن-١)}{١ \times ٢} \text{ و } م = \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١ \times ٢ \times ٣} \text{ و}$$

$$\text{و } جـ = \frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} \text{ و } \ldots$$

وحينئذ بضبط النسبة الدائمة الواقع بين مكرري الجزئين

$$\text{ج و } ش = \frac{\text{و}(ن-١)(ن-٢)\ldots}{ج}$$

فاذا وضعت مقادير المكررات [illegible]

في المعادلة (١) تحصلت من ذلك المعادلة

$$(١) \ldots (١+س)^{ن} = ١ + ن س + \frac{ن(ن-١)}{١ \times ٢} ش + \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١ \times ٢ \times ٣} ش + \ldots$$

فأما عدد الحدود في الطرف الثاني من هذه المعادلة والحد العمومي فانه مقدار يكون مبيناً بالصورة

$$\frac{م(م-١)(م-٢)\cdots(م-ن+١)}{١\times٢\times٣\cdots ن}$$

فان كان م دالاً على عدد صحيح موجب كان تحليل النكبة سابقة منتهياً بالحد م+١ اذا كان ن=م+١ أو ن>م+١ كان مكرر الحد العمومي معدوماً وان كان م دالاً على كسر أو على عدد سالب امتد تحليل النكبة المفروضة الى غير نهاية

قال مترجم عبارات هذا الكتاب ومصححها * ومنظم الفاظه وموضحها * راجي رحمة المعبود المبدي * السيد صالح افندي مجدي احد مترجمي العلوم الرياضية * ومدرسي اللغة الفرنساوية * بمدرسة المهندسخانة الخديوية * الكائنة ببولاق مصر المحمية * الى هنا انتهى الجزء الثاني من المنحة الزهرية * في الاعمال الجبرية * وقد قابله بي وعلى مطلبة النقاه * وبكل تتميم جمله وحلاه * المصيب فيما يعيد ويابدي * أحد معيدي العلوم الرياضية بتلك المدرسة * عطا حسن افندي

بعد أن قابل معي فيرالى المعادات الأسير * محمد مصطفى افندى
صاحب الاخلاق المرضية * فى الحمد لله من حكم المؤلفات
وابدعها * واتقن المصنفات وانفعها * وصلى الله على خاتم النبيين
* ورسول الملك الحق المبين * سيدنا محمد الهادى الامين * وعلى آله
وصحبه الراشدين المرشدين * ما لاح بسماء
الفهوم بدر تمام * وفاح بمحافل
العلوم مسك
ختام
تمت أضعف العباد الراجى عفو مولاه الشكور عبده محمد افندى مذكور
وقد صار طبع هذا الكتاب بعون الله الملك الوهاب بمطبعة مدرسة
المهندسخانة الخديوية ببولاق فى ثلاثة عشر خلت من شهر
جمادى الاولى المذكور من شهور سنة الف ومائتين وتسعة وستين
من الهجرة النبوية على صاحبها افضل الصلاة
واجزل التحية
امين